ریاضیات

تهیه و تنظیم : هادی پلاور و علی سعیدی‌زاده

۱۰۱- گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (\text{حاصل‌ضرب دو ریشه}) > 0 \\ (\text{مجموع دو ریشه}) < 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a > -1 \ \text{یا}\ a < -9 \qquad (1)$$

$$(\text{حاصل‌ضرب دو ریشه}) > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \qquad (2)$$

$$(\text{مجموع دو ریشه}) < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\text{یا}\ a < -3 \qquad (3)$$

$$\text{اشتراک (۳) و (۲) و (۱)} \Rightarrow a < -9$$

۱۰۲- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول:

ابتدا دامنه‌ی f را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0,2] \Rightarrow |x| = x$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \xrightarrow{x>0} f(x) = 2\sqrt{\frac{2x^2 - x^3}{x}}$$

$$= 2\sqrt{2x - x^2} = 2\sqrt{-(x^2 - 2x + 1) + 1} = 2\sqrt{-(x-1)^2 + 1}$$

$$0 < x \leq 2 \Rightarrow -1 < (x-1) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - (x-1)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{1-(x-1)^2} \leq 2 \Rightarrow R_f = [0,2]$$

راه حل دوم:

با عددگذاری به گزینه‌ی مورد نظر می‌رسیم.

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 0 \in R_f$$

فقط در گزینه‌ی «۲» عدد صفر وجود دارد. پس گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۱۰۳- گزینه‌ی «۱»

با توجه به نمودار، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است پس:

$$|a| = 3$$

هم‌چنین با توجه به این تابع سه دوره تناوب طی کرده تا به ۳ رسیده است، پس:

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

با توجه به این که مقدار تابع در بازه‌ی $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ نزولی است بنابراین تابع به صورت‌های زیر است:

$$y = -3\sin 2\pi x \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = -6$$

$$y = 3\sin(-2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = -6$$

۱۰۴- گزینه‌ی «۴»

تنیس چهارنفره یعنی دو تیم دو نفره بنابراین برای انجام یک بازی باید دو تیم (مدرسه) انتخاب شود که این عمل به $\binom{8}{2}$ طریق امکان‌پذیر است. چون در هر تیم دو بازیکن وجود دارد و این دو بازیکن از ۶ نفر هر مدرسه انتخاب شده است، پس داریم:

$$\text{حالت‌های ممکن انجام} = \binom{8}{2}\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{تیم اول}}\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{تیم دوم}} = 28 \times 15 \times 15 = 6300$$

بازی

۱۰۵- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} 11 \times \frac{40}{100} = 4/4 \\ 4 \times \frac{70}{100} = 2/8 \end{cases} \Rightarrow 4/4 + 2/8 = 7/2 \ \text{جرم کل رنگ}$$

فرض می‌کنیم با تبخیر x کیلوگرم محلول، غلظت آن به ۵۰٪ می‌رسد. داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 15 - x = 14/4 \Rightarrow x = 0/6 \ \text{کیلوگرم}$$

۱۰۶– گزینه‌ی «۴»

راه حل اول:

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow -x < x^۲ - ۲x < x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ - ۲x < x \Rightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۳ & (۱) \\ x^۲ - ۲x > -x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < ۰ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} x \in (۱,۳)$$

راه حل دوم: (عددگذاری)

$x = ۲ : |۲^۲ - ۲\times ۲| < ۲ \Rightarrow ۰ < ۲$ برقرار است

$\Rightarrow$ گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شود.

$x = ۱ : |۱^۲ - ۲\times ۱| < ۱ \Rightarrow ۱ < ۱$ برقرار نیست

$\Rightarrow$ گزینه‌های (۲) رد می‌شود.

گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۱۰۷– گزینه‌ی «۳»

$$f(۲x - ۳) = ۲x - ۳ - [۲x - ۳] = ۲x - ۳ - [۲x] + ۳ = ۲x - [۲x]$$

$$\Rightarrow g(x) = ۲x - [۲x] - ۲(x - [x]) = ۲x - [۲x] - ۲x + ۲[x]$$

$$= ۲[x] - [۲x]$$

$$k \le x < k + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲k \le ۲x < ۲k + ۱ \Rightarrow [x] = k, [۲x] = ۲k$$

$$\Rightarrow g(x) = ۲k - ۲k = ۰ \qquad (۱)$$

$$k + \frac{۱}{۲} \le x < k + ۱ \Rightarrow ۲k + ۱ \le ۲x < ۲k + ۲$$

$$\Rightarrow [x] = k, [۲x] = ۲k + ۱ \Rightarrow g(x) = ۲k - ۲k - ۱ = -۱ \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow R_g = \{۰, -۱\}$$

۱۰۸– گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = ۲x - |۴ - ۲x| = \begin{cases} ۲x + ۴ - ۲x & ; \ x > ۲ \\ ۲x - ۴ + ۲x & ; \ x \le ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۴ & ; \ x > ۲ \\ ۴x - ۴ & ; \ x \le ۲ \end{cases}$$

به ازای $x \le ۲$ تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$x \le ۲ \Rightarrow ۴x - ۴ \le ۴ \Rightarrow y \le ۴$$

$$y = ۴x - ۴ \Rightarrow x = \frac{y + ۴}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x + ۱ (x \le ۴)$$

۱۰۹– گزینه‌ی «۳»

$$۲\cos ۲x = \cot x(۴\sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow ۲\cos ۲x = ۴\sin x \cot x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow ۲(۲\cos^۲ x - ۱) = ۴\cos x + ۱ \Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲\cos x + ۱)(۲\cos x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۳}{۲} \ \text{غ‌قق} \\ \cos x = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۱۰– گزینه‌ی «۲»

فرض می‌کنیم $\alpha = \tan^{-۱} \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} - ۱}$ و $\beta = \tan^{-۱} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ داریم:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{\frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} - ۱} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱ + \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} - ۱} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$= \frac{\frac{۲\sqrt{۲} + ۲ - ۲ + \sqrt{۲}}{۲(\sqrt{۲} - ۱)}}{۱ + \frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲(\sqrt{۲} - ۱)}} = \frac{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲(\sqrt{۲} - ۱)}}{\frac{۲\sqrt{۲} - ۲ + ۲ + \sqrt{۲}}{۲(\sqrt{۲} - ۱)}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = ۱$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴}$$

۱۱۱– گزینه‌ی «۱»

ابتدا وضعیت براکت را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x \to (\frac{۱}{۶})^+} ۴\cos^۲ \pi x = ۴\cos^۲ (\frac{\pi}{۶})^+ = ۴((\frac{\sqrt{۳}}{۲})^-)^۲ = ۴(\frac{۳}{۴})^- = ۳^-$$

$$\lim_{x \to (\frac{۱}{۶})^+} \frac{[۳^-] - ۱۲x}{ax + b} = \lim_{x \to (\frac{۱}{۶})^+} \frac{۲ - ۱۲x}{ax + b} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (\frac{۱}{۶})^+} \frac{-۱۲(-\frac{۱}{۶} + x)}{a(x + \frac{b}{a})} = \frac{۱}{۲}$$

برای این که تساوی فوق برقرار باشد باید:

$$\begin{cases} \frac{-12}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{b}{a} = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow a = -24, b = 4 \Rightarrow a + b = -20$$

۱۱۲- گزینه‌ی «۳»

چون مشتق در $x = 1$ وجود دارد پس تابع پیوسته است و $f'_-(1) = f'_+(1)$.

شرط پیوستگی:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - \frac{1}{x}) = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + ax + b) = a + b + 1 \xrightarrow{(1)} a + b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a + b = -1 \qquad (2)$$

شرط $f'_-(1) = f'_+(1)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & ; \quad x > 1 \\ 2x + a & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

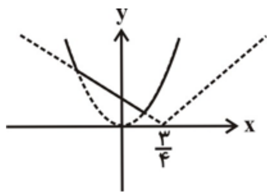
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{1^2} = 2 + a \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{(2)} b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ; \quad x \ge 1 \\ x^2 - 1 & ; \quad x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

۱۱۳- گزینه‌ی «۱»

نمودار دو تابع $y_1 = x^2$ و $y_2 = |x - \frac{3}{4}|$ را رسم می‌کنیم. قسمت‌هایی از دو نمودار که پایین‌تر قرار دارد را حذف می‌کنیم تا نمودار f به دست آید.



کم‌ترین مقدار f در محل برخورد دو منحنی y_1 و y_2 با طول مثبت به دست می‌آید.

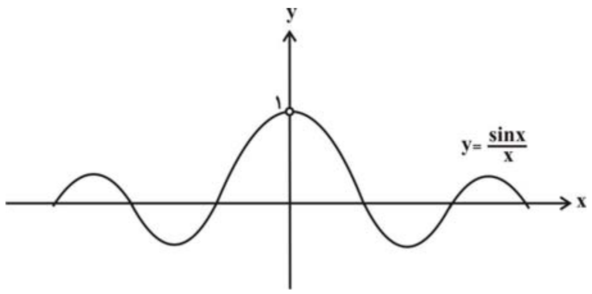
$$x^2 = |x - \frac{3}{4}| \xrightarrow{0 < x < \frac{3}{4}} x^2 = -x + \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 4(\frac{3}{4})}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2} = \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}$$

چون طول نقطه‌ی برخورد مثبت است پس $x = \frac{1}{2}$ قابل قبول است. بنابراین مقدار f در این نقطه برابر $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ است.

۱۱۴- گزینه‌ی «۲»

با توجه به نمودار $y = \frac{\sin x}{x}$ داریم:



$$\lim_{x \to 0} [\frac{\sin x}{x}] + 2[\frac{x}{\sin x}] = [1^-] + 2[1^+] = 0 + 2 \times 1 = 2$$

۱۱۵- گزینه‌ی «۴»

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow a = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1 - x}}{(x - 1) \times \sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1 - x}}{\sqrt[3]{(1 - x)^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع در $x = 1$ پیوسته نیست.

۱۱۶- گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2})(x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + (\sqrt[3]{x^3 - x^2})^2)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + (\sqrt[3]{x^3 - x^2})^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + (\sqrt[3]{x^3})^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$: مجانب افقی

با توجه به گزینه‌ها $f(\frac{1}{9}) = \frac{1}{3}$ می‌شود. بنابراین f مجانب افقی خود را در $x = \frac{1}{9}$ قطع می‌کند.

۱۱۷- گزینه‌ی «۲»

معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(-1,3)$ برابر است با $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$.

با توجه به این که این خط در $x = 3$ بر منحنی f مماس است، پس:

$$\begin{cases} f(3) = y(3) = \frac{-1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = 1 \\ f'(3) = m = \frac{-1}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{(f(x)+5)(f(x)-1)}{-(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-1}{x-3} \times \lim_{x\to 3} -(f(x)+5)$$
$$= f'(3) \times (-f(3) - 5) \overset{(1)}{=\!=} \frac{-1}{2} \times (-1-5) = 3$$

۱۱۸- گزینه‌ی «۲»

$$f'(x)g'(f(x)) = (g(f(x)))' = \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}}\right)'$$

$$= \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}\right)' = (x)' = 1$$

۱۱۹- گزینه‌ی «۴»

$$(1,\alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha,1) \in f \Rightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 2} = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha - 1 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$f'(x) = \frac{2(2) - (-1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{5}{(3+2)^2}} = 5$$

$$m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{m_{\text{مماس}}} = \frac{-1}{5}$$

معادله‌ی خط قائم : $y - 3 = \frac{-1}{5}(x-1) \xrightarrow{y=0} x - 1 = 15$

$$\Rightarrow x = 16$$

۱۲۰- گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8$$

جواب‌های معادله‌ی $f'(x) = 0$، طول نقاط اکسترمم است چون در معادله‌ی فوق حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر $\frac{-8}{3}$ است، یک جواب مثبت و یک جواب منفی داریم.

پس جواب مثبت در بازه‌ی $(1,4)$ است.

$$3x^2+2ax-8=0 \Rightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+24}}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب مثبت}} x=\frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{3} \Rightarrow 1<\frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{3}<4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+\sqrt{a^2+24}<12 \Rightarrow \sqrt{a^2+24}<12+a \\ -a+\sqrt{a^2+24}>3 \Rightarrow \sqrt{a^2+24}>3+a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2+24<a^2+24a+144 \Rightarrow 24a>-120 \Rightarrow a>-5 \quad (1) \\ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2+24>a^2+6a+9 \Rightarrow 6a<15 \Rightarrow a<2.5 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow -5<a<2.5$$

۱۲۱- گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=(x-1)\,|x^2+x-2|=(x-1)\,|(x+2)(x-1)|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -(x+2)(x-1)^2 & ; \quad -2\le x\le 1 \\ (x+2)(x-1)^2 & ; \quad x>1 \text{ یا } x<-2 \end{cases}$$

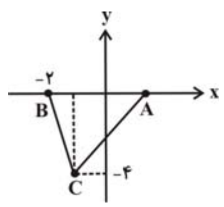
$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -[(x-1)^2+2(x-1)(x+2)] & ; \quad -2<x<1 \\ [(x-1)^2+2(x-1)(x+2)] & ; \quad x>1 \text{ یا } x<-2 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \pm[(x-1)((x-1)+2(x+2))]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0) \\ x-1+2x+4=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B(-1,-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(-2)=-9 \\ f'_-(-2)=9 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \text{ بحرانی} \Rightarrow C(-2,0)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(4\times 3)=6$$



۱۲۲- گزینه‌ی «۴»

با توجه به شکل، مجانب افقی تابع مقداری مثبت است بنابراین یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) صحیح است. زیرا در این گزینه‌ها داریم:

$$\lim_{x\to\infty} y=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

هم‌چنین $x=-1$ جزء دامنه‌ی تابع نیست بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است. (ریشه‌ی مخرج)

۱۲۳- گزینه‌ی «۳»

$$f'(x)=\frac{1\times 1-1\times 0}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}>0 : \text{صعودی } f$$

بنابراین برای محاسبه‌ی مجموع بالا انتهای هر بازه را باید در نظر گرفت.

$$[0,\tfrac{1}{2}][\tfrac{1}{2},1][1,\tfrac{3}{2}][\tfrac{3}{2},2]$$

$$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$$

$$U_4=\Delta x\left(f(\tfrac{1}{2})+f(1)+f(\tfrac{3}{2})+f(2)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10+15+18+20}{30}\right)=\frac{63}{60}=\frac{21}{20}=1.05$$

۱۲۴- گزینه‌ی «۲»

$$\sqrt{(1+\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}}=\sqrt{1+x+2\sqrt{x}-4\sqrt{x}}=\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$$

$$=\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}=|1-\sqrt{x}| \qquad (1)$$

$$1\le x\le 4 \Rightarrow 1\le\sqrt{x}\le 2 \Rightarrow -2\le-\sqrt{x}\le-1$$

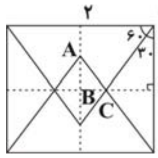
$$\Rightarrow -1\le 1-\sqrt{x}\le 0 \qquad (2)$$

$$\int_1^4 \sqrt{(1+\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}}\,dx \overset{(1)}{=} \int_1^4 |1-\sqrt{x}|\,dx \overset{(2)}{=} \int_1^4 \sqrt{x}-1\,dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right)\Big]_1^4=\left(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}-4\right)-\left(\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{5}{3}$$

۱۲۵- گزینه‌ی «۴»

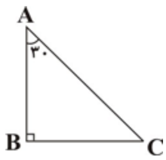
چون نسبت اضلاع را خواسته پس می‌توانیم ضلع مربع اصلی را هر مقدار دلخواهی در نظر بگیریم، بنابراین آن‌را به دلخواه برابر ۲ واحد انتخاب می‌کنیم.



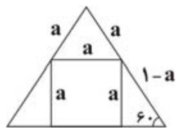
$$\overset{\Delta}{CHD}: \tan ۳۰° = \frac{CH}{DH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{DH=۱} CH = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۳۰° = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow AB = \sqrt{۳}BC = \sqrt{۳} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\text{قطر بزرگ لوزی}}{\text{ضلع مربع}} = \frac{۲AB}{۲} = AB = \sqrt{۳} - ۱$$



۱۲۶- گزینه‌ی «۱»



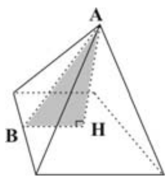
$$\sin ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

۱۲۷- گزینه‌ی «۱»

برای محاسبه حجم هرم به ارتفاع آن نیاز داریم؛ بنابراین باید AH را محاسبه کنیم.

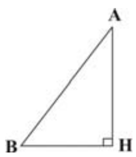
$$AB = \text{ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع} = \text{ضلع} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$



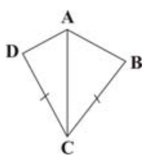
$$BH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱ \to AH = ۱$$

$$?? = \frac{۱}{۳}\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳}(\sqrt{۲})^۲ \times ۱ = \frac{۲}{۳}$$



۱۲۸- گزینه‌ی «۱»

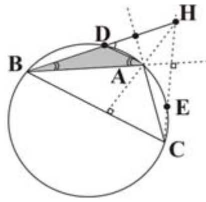


با توجه به قضیه لولا داریم:

$$\begin{cases} AC = AC \\ BC = DC \end{cases} \Rightarrow AB > AD$$

$$A\hat{C}B > A\hat{C}D$$

۱۲۹- گزینه‌ی «۳»



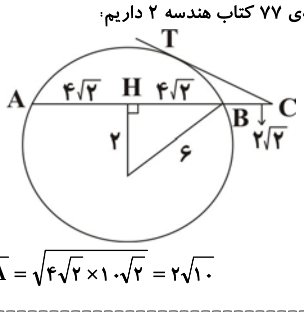
اضلاع زاویه‌ی AHD بر اضلاع زاویه ACB عمود است، بنابراین این دو زاویه برابراند.

$$A\hat{H}D = A\hat{C}B = \frac{AB}{۲} = \frac{AD}{۲} + \frac{BD}{۲} = \hat{B}_۱ + \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = A\hat{D}H$$

دقت کنید که $D_۱$ در مثلث $\overset{\Delta}{ADB}$ زاویه‌ی خارجی است، بنابراین برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش می‌باشد.

۱۳۰- گزینه‌ی «۱»

شعاع دایره برابر ۶ واحد است، بنابراین $BH = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = ۴\sqrt{۲}$ طبق قضیه مماس و قاطع صفحه‌ی ۷۷ کتاب هندسه ۲ داریم:



$$CT = \sqrt{CB\,.\,CA} = \sqrt{۴\sqrt{۲} \times ۱۰\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۱۰}$$

۱۳۱- گزینه‌ی «۲»

تبدیل انتقال داده شده در مسأله یک انتقال با بردار (۱,۰) است و ضابطه‌ی دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات و در جهت مثلثاتی به‌صورت $R(x,y) = (-y, x)$ می‌باشد و ترکیب این دو تبدیل ضابطه‌ای به شکل زیر دارد.

$$T'(x,y) = (-y+۱\ ,\ x) \Rightarrow \begin{cases} -y+۱ = x' \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = ۱ - x' \end{cases}$$

برای تعیین تصویر نهایی کافیست روابط فوق را در معادله‌ی $۲x - ۵y = ۱۰$ جایگذاری کنیم:

$$۲(y') - ۵(۱ - x') = ۱۰ \Rightarrow ۵x' + ۲y' = ۱۵$$

۱۳۲- گزینه‌ی «۴»

اگر دو خط متنافر را روی یک صفحه تصویر کنیم تصاویر آن‌ها دو خط متقاطع یا موازی خواهد بود و فقط در صورتی تصاویرشان دو خط موازی می‌شود که صفحه‌ی تصویر موازی با عمود مشترک دو خط متنافر باشد.

۱۳۳- گزینه‌ی «۲»

قطرهای متوازی الاضلاع بردارهای $a+b$ و $a-b$ می‌باشند.

$$\begin{matrix} \vec{a} = (۳\ ,\ ۳\ ,\ ۰) \\ \vec{b} = (۱\ ,\ -۱\ ,\ -۲) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b = (۴\ ,\ ۲,\ -۲) = \vec{u} \\ a-b = (۲\ ,\ ۴,\ ۲) = \vec{v} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{۸+۸-۴}{\sqrt{۲۴}\sqrt{۲۴}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۴- گزینه‌ی «۲»

فاصله‌ی مبدأ مختصات از یک خط از رابطه‌ی $\frac{|OA \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ به‌دست می‌آید که در آن O مختصات یک نقطه‌ی دلخواه از خط و $\vec{u}$ بردار هادی خط است.

$$O(۰\ ,\ ۰\ ,\ ۰)\ \ ,\ A(۲\ ,\ ۰\ ,\ ۰) \Rightarrow OA = (۲\ ,\ ۰\ ,\ ۰)$$

$$,\ \vec{u} = (۰\ ,\ ۱\ ,\ -۱) \Rightarrow OA \times \vec{u} = (۰\ ,۲\ ,۲)$$

$$\text{فاصله} = \frac{|(۰\ ,\ ۲\ ,\ ۲)|}{(۰\ ,\ ۱,\ -۱)} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲$$

۱۳۵- گزینه‌ی «۴»

ابتدا معادله‌ی دسته صفحه شامل فصل مشترک دو صفحه را می‌نویسیم و برای تعیین k مختصات نقطه‌ی A را در آن صدق می‌دهیم:

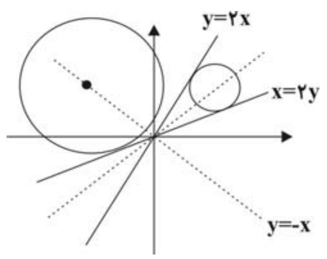
معادله‌ی دسته صفحه: $(2x+3y-z-6)+k(3x-2y+z)=0 \xrightarrow{A(1,4,2)} k=2$

$\Rightarrow k=2 \Rightarrow 8x-y+z=6$

تقاطع با محور z ها $\xrightarrow{x=y=0} z=6$

۱۳۶- گزینه‌ی «۳»

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط قرار دارد. با توجه به شکل مرکز دایره کوچک‌تر روی $y=x$ و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y=-x$ قرار دارد. $O(2\sqrt{5}\ ,\ 2\sqrt{5})$

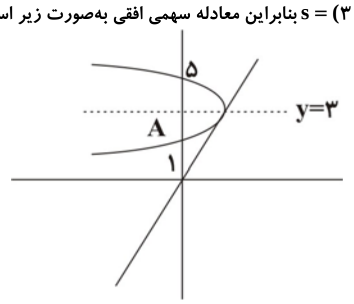


شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط $2y-x=0$ می‌باشد.

$$R=\frac{|4\sqrt{5}-2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2$$

۱۳۷- گزینه‌ی «۱»

معادله محور تقارن سهمی $y=\frac{5+1}{2}=3$ می‌باشد و با توجه به این‌که محور تقارن از رأس سهمی می‌گذرد و با توجه به این‌که رأس سهمی روی $y=x$ است نتیجه می‌گیریم: $s=(3\ ,\ 3)$ بنابراین معادله سهمی افقی به‌صورت زیر است.



فاصله کانون تا خط هادی $=2|a|=\frac{2}{3}$

$$(y-3)^2=4a(x-3)\xrightarrow{A(0\ ,\ 1)} a=-\frac{1}{3}$$

۱۳۸- گزینه‌ی «۲»

ابتدا معادله‌ی داده شده را به‌صورت $(x-y)^2-4(x+y)=0$ مرتب می‌کنیم، با توجه به این‌که ضرایب x^2 و y^2 برابراند زاویه‌ی دوران 45° و معادلات تبدیل به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-\sqrt{2}y' \\ x+y=\sqrt{2}x' \end{cases} \Rightarrow (-\sqrt{2}y')-4(\sqrt{2}x')=0 \Rightarrow y'^2=2\sqrt{2}x'$$

فاصله کانون تا خط هادی $=2|a|\ ,\ 4a=2\sqrt{2}\Rightarrow 2a=\sqrt{2}$

۱۳۹- گزینه‌ی «۲»

ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه کرده و از $a+b+c+5$ فاکتور می‌گیریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b+c+5 & b & c \\ a+b+c+5 & b+5 & c \\ a+b+c+5 & b & c+5 \end{vmatrix}=(\underbrace{a+b+c}_{7}+5)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+5 & c \\ 1 & b & c+5 \end{vmatrix}$$

قرینه‌ی سطر اول را به دو سطر بعدی اضافه می‌کنیم.

$$|A|=12\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=12\times 5^2$$

$$|5A^{-1}|=5^3\,|A^{-1}|=5^3\,\frac{1}{|A|}=\frac{5^3}{12\times 5^2}=\frac{5}{12}$$

۱۴۰- گزینه‌ی «۴»

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$A^4=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۴۱- گزینه‌ی «۱»

۱۴۲- گزینه‌ی «۳»

۱۴۳- گزینه‌ی «۱»

شروع استقرا: $n=4\to 4!>\sqrt{6}^4 \qquad n=5\to 5!>\sqrt{6}^5$

فرض استقرا: $k!>\sqrt{6}^k$ $\qquad$ فرض $\times(k+1)\Rightarrow (k+1)!>(k+1)\sqrt{6}^k$

حکم استقرا: $(k+1)!>\sqrt{6}^{k+1}$ $\qquad \Rightarrow (k+1)\sqrt{6}^k>\sqrt{6}^{k+1}\Rightarrow k+1>\sqrt{6}$

۱۴۴- گزینه‌ی «۴»

مجموعه‌ی داده شده را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

$$\{12\ ,\ (11\ ,13)\ ,\ \ldots\ ,\ (3\ ,\ 21)\ ,\ (2\ ,\ 22)\ ,\ (1\ ,\ 23)\}$$

اگر ۱۳ عدد از این مجموعه انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ عدد مربوط به یک زوج مرتب هستند و حجم آن‌ها برابر ۲۴ است.

۱۴۵- گزینه‌ی «۳»

ابتدا عضوهای مجموعه‌ی B را به‌دست آوریم:

$$A - B = \{1, \{1\}, \{1,2\}, \{2\}, 2\} - \{1, 2\} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2\}\} \Rightarrow n(A-B) = 3$$

مقدار زیر مجموعه‌های سره و غیرتهی یک مجموعه n عضوی برابر است با $2^n - 2$ بنابراین پاسخ مسأله برابر است با: $2^3 - 2 = 6$

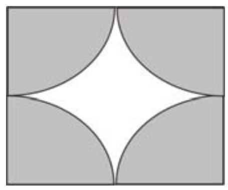
۱۴۶- گزینه‌ی «۳»

$$|x| \le 2 \xrightarrow{x \in z} x = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \ , \ 0 \le y \le x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 2 \to 0 \le y \le 4 \to y = \{0, 1, 2, 3, 4\} \to 5 \times 2 = 10 \\ x = \pm 1 \Rightarrow 0 \le y \le 1 \to y\{0, 1\} \to 2 \times 2 = 4 \\ x = 0 \to y = 0 \to 1 \times 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{۱۵ زوج مرتب وجود دارد}$$

۱۴۷- گزینه‌ی «۱»

A' پیشامد این است که فاصله نقطه‌ی انتخابی از هر رأس کوچک‌تر یا مساوی یک واحد باشد.



$$P(A') = \frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{S_{\text{دایره}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{\pi(1)^2}{2 \times 2} = \frac{\pi}{4}$$

۱۴۸- گزینه‌ی «۴»

طبق فرض: $P(A) = 0/8$ و $P(B) = 0/4$ و $P(A \Delta B) = 0/6$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{0/8 + 0/4 - 0/6}{2} = 0/3$$

$$P(B' \cap A) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/8 - 0/3 = 0/5$$

۱۴۹- گزینه‌ی «۳»

$$Pq = 50 = 5 \times 10 = 5 \times \binom{5}{2} \Rightarrow P = 5$$

$$k_p \text{ تعداد دور به طول } r \text{ در} = \binom{p}{r}\frac{(r-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

۱۵۰- گزینه‌ی «۲»

$168P$ زوج است پس n فرد است بنابراین $n = 2k + 1$ $\qquad 168p + 1 = n^2$

$$168p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2k(2k+2) \Rightarrow 168p = 4k(k+1) \Rightarrow 42p = k(k+1)$$

K و $k+1$ متوالیند بنابراین $42p$ را باید چنان تجزیه کنیم که حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشند (p اول است)

$$k(k+1) = 42 \times p \Rightarrow p = 41 \ , \ p = 43$$

$$k(k+1) = 14 \times 3p \Rightarrow 3p = 15 \to p = 5 \quad \to$$ ۴ عدد اول یافت می‌شود.

$$k(k+1) = 21 \times 2p \Rightarrow 2p = 22 \to p = 11$$

۱۵۱- گزینه‌ی «۱»

$$(11n - 5 \ , \ 9n + 2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 11n - 5 \xrightarrow{\times(-9)} d \mid -99n + 45 \\ d \mid 9n + 2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 99n + 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid 67 \Rightarrow 67 \mid 9n + 2$$

$$9n + 2 \overset{67}{\equiv} 0 \Rightarrow 9n \overset{67}{\equiv} -2 \overset{67}{\equiv} -69 \xrightarrow{\div 3} 3n \overset{67}{\equiv} -23 \overset{67}{\equiv} -90 \xrightarrow{\div 3} n \overset{67}{\equiv} -30$$

$$\Rightarrow n = 67k - 30$$

شما جواب ۲ رقمی که برای n به‌دست می‌آید برابر ۳۷ است که به ازای $n = 1$ حاصل می‌شود.

۱۵۲- گزینه‌ی «۴»

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 49 \overset{43}{\equiv} +6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{54} = (7^3)^{18} \overset{43}{\equiv} 1^{18} \overset{43}{\equiv} 1$$

$$13 \times 7^{54} + A \overset{43}{\equiv} 0 \Rightarrow 13 + A \overset{43}{\equiv} 0 \to A \overset{43}{\equiv} -13 \Rightarrow A \overset{43}{\equiv} 30$$

۱۵۳- گزینه‌ی «۳»

باید تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} \overset{1}{x_1} + \overset{1}{x_2} + \overset{1}{x_3} + \overset{1}{x_4} = \overset{5}{9} \\ 1 \le i \le 4 \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

تعداد جواب‌های این معادله با تعداد جواب‌های معادله زیر برابر است.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 0 \le x_i \le 3 < 4 \\ 1 \le i \le 4 \end{cases} \qquad \binom{8}{3} - 4\binom{8-4}{3} = 56 - 4(4) = 40$$

۱۵۴- گزینه‌ی «۲»

$$P(A) = \frac{\binom{\text{سفید}}{2} + \binom{\text{سیاه}}{2}}{\binom{\text{مهره}}{2}} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

۱۵۵- گزینه‌ی «۲»

$$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{6} \frac{2^x}{A} = 1 \Rightarrow \frac{1}{A}(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = 1$$

مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی با قدر نسبت q و جمله اول a برابر است با $a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ بنابراین:

$$2^1 + \cdots + 2^6 = 2\frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 126 \Rightarrow A = 126$$

$$P(x = \text{فرد}) = P(x = 1) + P(x = 3) + P(x = 5) = \frac{2^1 + 2^3 + 2^5}{126} = \frac{42}{126} = \frac{1}{3}$$

فیزیک

تهیه و تنظیم : علی میرنوری

۱۵۶– گزینه‌ی «۳»

برای دو بردار با اندازه‌های ثابت، هنگامی بزرگی برایند آن‌ها بیشینه است که زاویه‌ی بین دو بردار صفر باشد و هنگامی بزرگی تفاضل آن‌ها بیشینه است که زاویه‌ی بین آن‌ها 180° باشد. در این صورت بزرگی برایند آن‌ها صفر است.

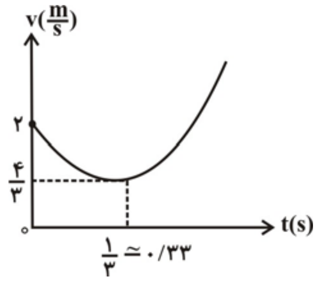
۱۵۷– گزینه‌ی «۱»

با رسم نمودار سرعت- زمان این متحرک، نوع حرکت آن را بررسی می‌کنیم.

$$x = 2t^3 - 2t^2 + 2t \xrightarrow{v=\frac{dx}{dt}} v = 6t^2 - 4t + 2$$

t	v
0	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow 12t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}s$$



پس با توجه به نمودار، در بازه‌ی زمانی $0 < t < \frac{1}{3}s$ که نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، حرکت متحرک کندشونده است که در این جا فقط گزینه‌ی «۱» در این بازه قرار دارد.

۱۵۸– گزینه‌ی «۲»

در ابتدا، با توجه به مساوی بودن جابه‌جایی دو متحرک و نیز رابطه‌ی بین شتاب آن‌ها، داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_0=0} \begin{cases} v_A^2 = 2a_A\Delta x_A \\ v_B^2 = 2a_B\Delta x_B \end{cases}$$

$$\xrightarrow[a_A=4a_B]{\Delta x_A=\Delta x_B} \begin{cases} v_A^2 = 8a_B \\ v_B^2 = 2a_B \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

حال برای تعیین سرعت متوسط داریم:

$$\begin{rcases} \bar{v}_A = \frac{v_0 + v_A}{2} \xrightarrow[v_0=0]{v_A=2v_B} \bar{v}_A = v_B \\ \bar{v}_B = \frac{v_0 + v_B}{2} \xrightarrow{v_0=0} \bar{v}_B = \frac{1}{2}v_B \end{rcases} \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = 2$$

۱۵۹– گزینه‌ی «۱»

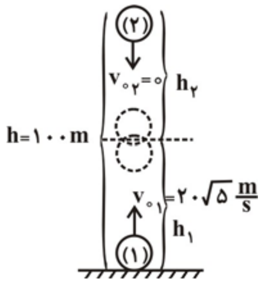
در ابتدا سرعت اولیه‌ی گلوله‌ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده را می‌یابیم.

$$H_{اوج} = \frac{v_0^2}{2g} \xrightarrow{H_{اوج}=100m} 100 = \frac{v_0^2}{20} \Rightarrow v_0 = 20\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$$

حال زمان به هم رسیدن گلوله‌ها را می‌یابیم:

$$t = \frac{h}{v_{01} + v_{02}} = \frac{100}{0 + 20\sqrt{5}} \Rightarrow t = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}s$$

حال برای تعیین ارتفاع نقطه‌ی برخورد از زمین داریم:

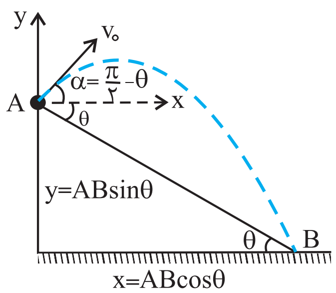


$$h_2 = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{t=\sqrt{5}s} h_2 = \frac{1}{2}\times 10\times 5 = 25m$$

$$h_1 = h - h_2 = 100 - 25 \Rightarrow h_1 = 75m$$

۱۶۰– گزینه‌ی «۲»

با انتخاب دستگاه مختصات در نقطه‌ی پرتاب و نوشتن معادله مسیر به صورت زیر به محاسبه طول AB می‌پردازیم:



$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha \xrightarrow[\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta]{x=AB\cos\theta,\,y=-AB\sin\theta}$$

$$-AB\sin\theta = \frac{-g(AB)^2\cos^2\theta}{2v_0^2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\theta)} + AB\cos\theta\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$\xrightarrow[\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot g\,\theta]{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta} -AB\sin\theta$$

$$= \frac{-g(AB)^{۲}\cos^{۲}\theta}{۲v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\theta} + AB\frac{\cos^{۲}\theta}{\sin\theta} \rightarrow \frac{g(AB)\cos^{۲}\theta}{۲v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\theta}$$

$$= \sin\theta + \frac{\cos^{۲}\theta}{\sin\theta} \rightarrow \frac{g(AB)\cos^{۲}\theta}{۲v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\theta} = \frac{۱}{\sin\theta}$$

$$\rightarrow AB = \frac{۲v_{\circ}^{۲}\sin\theta}{g\cos^{۲}\theta}$$

۱۶۱– گزینه‌ی «۲»

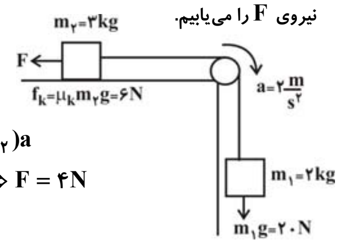
در ابتدا با مشتق‌گیری از معادله‌ی تکانه نسبت به زمان، معادله‌ی نیرو را می‌یابیم. با قرار دادن لحظه‌ی مورد نظر در این معادله، بزرگی نیرو و پس از آن شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم.

$$P = t^{۳} - ۵t - ۲۰ \xrightarrow{F=\frac{dp}{dt}} F = ۳t^{۲} - ۵ \xrightarrow{t=۵s}$$

$$F = ۳(۵)^{۲} - ۵ \Rightarrow F = ۷۰N \xrightarrow[m=۵kg]{F=ma} ۷۰ = ۵a \Rightarrow a = ۱۴\frac{m}{s^{۲}}$$

۱۶۲– گزینه‌ی «۳»

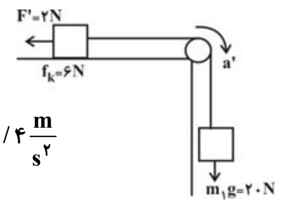
در ابتدا با استفاده از به کارگیری قانون دوم نیوتون برای کل دستگاه بزرگی نیروی F را می‌یابیم.



$$\sum F = \sum m.a$$
$$m_۱g - (f_k + F) = (m_۱ + m_۲)a$$
$$۲۰ - (۶ + F) = (۲ + ۳)\times ۲ \Rightarrow F = ۴N$$

حال اگر نیروی F را نصف کنیم، داریم:

$$F' = \frac{۱}{۲}F = ۲N$$



$$\sum F = \sum m.a$$
$$m_۱g - (F' + f_k) = (m_۱ + m_۲)a'$$
$$۲۰ - (۲ + ۶) = (۲ + ۳)a' \Rightarrow a' = ۲/۴\frac{m}{s^{۲}}$$

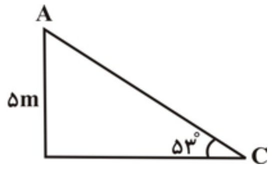
راه کوتاه‌تر:

بدیهی است که اگر در این جا (که جسم $m_۱$ با شتاب a به پایین حرکت می‌کند) نیروی مقاوم F کاهش یابد، شتاب حرکت دستگاه بیش‌تر از قبل می‌شود، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» حذف می‌شوند. از طرفی اگر فرض کنیم که نیروی مقاوم F صفر باشد حداکثر شتاب دستگاه می‌تواند $a = \frac{m_۱g - f_k}{m_۱ + m_۲} = \frac{۲۰ - ۶}{۵} = ۲/۸\frac{m}{s^{۲}}$ باشد. پس گزینه‌ی «۴» نیز حذف می‌شود و فقط گزینه‌ی «۳» باقی می‌ماند.

۱۶۳– گزینه‌ی «۱»

در اینجا سؤال، ترکیبی از دینامیک و حرکت شناسی است که در ابتدا باید سرعت جسم در لحظه‌ی جدا شدن از سطح شیبدار را محاسبه کنیم.

با استفاده از پایستگی انرژی داریم: (اصطکاک ناچیز است.)



$$E_C = E_A \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_C^{۲} = mgh_A$$

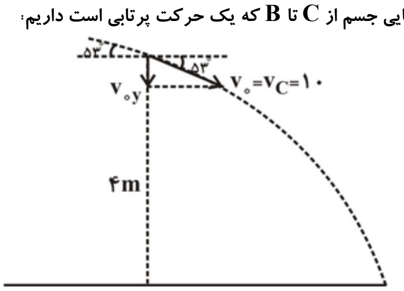
$$\xrightarrow{h_A=۵m} \frac{۱}{۲}v_C^{۲} = ۱۰\times ۵ \Rightarrow v_C = ۱۰\frac{m}{s}$$

و زمان حرکت جسم در این جابه‌جایی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$v = a_۱t + v_{\circ} \xrightarrow[v_{\circ}=\circ,\,v=۱۰\frac{m}{s}]{a=g\sin ۵۳^{\circ}=۱۰\times ۰/۸=۸\frac{m}{s^{۲}}} ۱۰ = ۸t_۱$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۱/۲۵s$$

و در جابه‌جایی جسم از C تا B که یک حرکت پرتابی است داریم:



$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{\circ y}t$$

$$\xrightarrow[\Delta y=-۴m]{v_{\circ y}=-v_{\circ}\sin ۵۳^{\circ}=-۱۰\times ۰/۸=-۸\frac{m}{s}} -۴ = -۵t_۲^{۲} - ۸t_۲$$

$$\Rightarrow ۵t_۲^{۲} + ۸t_۲ - ۴ = \circ \Rightarrow t_۲ = ۰/۴s$$

$$t_{کل} = t_۱ + t_۲ = ۱/۲۵ + ۰/۴ \Rightarrow t_{کل} = ۱/۶۵s$$

۱۶۴– گزینه‌ی «۴»

در حالت اول که جسم به فنر آویزان است و در حالت تعادل قرار دارد، نیروی فنر برابر با mg است. در حالت دوم که جسم در حال حرکت دایره‌ای است، نیروی فنر

تأمین‌کننده‌ی نیروی جانب مرکز جسم و برابر $\frac{mv^2}{L}$ است. از طرفی چون تغییر طول فنر در هر دو حالت یکسان است، بنابراین نیروی فنر نیز در هر دو حالت هم‌اندازه خواهد بود. $(F = kx)$ بنابراین داریم:

(۱) در حالت آویزان: $F_{\text{فنر}} = mg$

(۲) در حالت حرکت دایره‌ای: $F'_{\text{فنر}} = \frac{mv^2}{L}$

$$(1)\ \text{و}\ (2) \xrightarrow{F=F'} \frac{mv^2}{L} = mg \Rightarrow v = \sqrt{Lg}$$

۱۶۵- گزینه‌ی «۴»

کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است.

$$\sum W = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_1=20\frac{m}{s}]{v_2=10\frac{m}{s}}$$

$$\sum W = \frac{1}{2} \times 2((10)^2 - (20)^2) \Rightarrow \sum W = -300J$$

۱۶۶- گزینه‌ی «۱»

از یک طرف آب با از دست دادن گرما به دمای $20^\circ C$ می‌رسد و از طرف دیگر یخ صفر درجه با گرفتن گرما، ابتدا به آب صفر درجه و پس از آن به آب $20^\circ C$ می‌رسد، اگر جرم یخ را m' فرض کنیم، داریم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$mc(\theta_e - \theta_1) + m'L_f + m'c\theta_e = 0 \xrightarrow[\theta_1=30^\circ C]{m=1kg,\theta_e=20^\circ C}$$

$$1 \times 4200(20 - 30) + m' \times 336000 + m' \times 4200 \times 20 = 0$$

$$\Rightarrow m' = 0/1kg \Rightarrow m' = 100g$$

۱۶۷- گزینه‌ی «۲»

با نوشتن رابطه‌ی مربوط به آهنگ رسانش گرمایی داریم:

$$\frac{Q}{t} = \frac{KA\Delta\theta}{l} \xrightarrow[\Delta\theta=200-0=200^\circ C,l=1m]{A=\pi r^2=\pi\times1\times10^{-4}=3\times10^{-4}m^2,k=240\frac{W}{m.k}}$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{3 \times 10^{-4} \times 240 \times 200}{1} \Rightarrow \frac{Q}{t} = 14/4W$$

۱۶۸- گزینه‌ی «۱»

با نوشتن رابطه مربوط به بازده ماشین گرمایی کارنو داریم:

$$\eta_{\text{کارنو}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \xrightarrow{\eta=0/25,T_H-T_C=100}$$

$$0/25 = \frac{100}{T_H} \Rightarrow T_H = 400K \Rightarrow \theta_H = 400 - 273$$

$$\Rightarrow \theta_H = 127^\circ C$$

۱۶۹- گزینه‌ی «۴»

در نقاط a و b انرژی درونی گاز یکسان است. زیرا داریم:

$$U \propto P.V \Rightarrow \frac{U_b}{U_a} = \frac{P_bV_b}{P_aV_a} = \frac{\frac{1}{3}P_1 \times 3V_1}{P_1 \times V_1} \Rightarrow \frac{U_b}{U_a} = 1$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_b - U_a = 0 \Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow Q = |W|$$

(دقت کنید که در طول فرایند در ابتدا دما و انرژی درونی گاز، افزایش، سپس کاهش می‌یابد.)

۱۷۰- گزینه‌ی «۲»

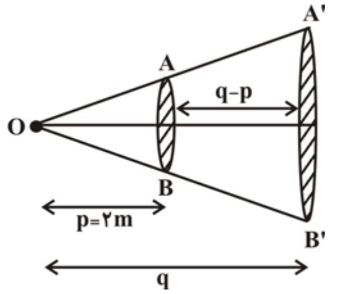
چون در این فرایند، دمای گاز افزایش یافته است، انرژی درونی گاز نیز افزایش می‌یابد، لذا $\Delta U > 0$ است. از طرفی، می‌دانیم که در فرایند هم‌فشار همواره Q و ΔU هم علامتند و $|Q| > |\Delta U|$ است. بنابراین:

$0 < \Delta U < Q$ است.

۱۷۱- گزینه‌ی «۳»

قبل از هر چیز می‌دانیم که اگر بخواهیم قطر سایه بیش‌تر شود، باید چشمه‌ی نور را به توپ نزدیک کنیم (گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.)

با رسم یک شکل ساده داریم. (AB قطر توپ و $A'B'$ قطر سایه‌ی توپ است.)



$$\overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OA'B'}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{q}{p} \xrightarrow{A'B'=2AB} 2 = \frac{q}{p} \xrightarrow{p=2m} q = 4m$$

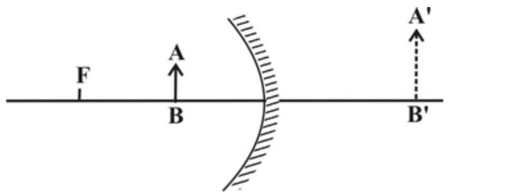
$$\Rightarrow q - p = 2m$$

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{q'}{p'} \xrightarrow{A''B''=3AB} \frac{3}{1} = \frac{q'}{p'} \Rightarrow \frac{3-1}{1} = \frac{q'-p'}{p'}$$

$$\xrightarrow{q'-p'=2} p' = 1m \xrightarrow{\Delta p=|p'-p|} \Delta p = 1m$$

۱۷۲- گزینه‌ی «۱»

چون تصویر مستقیم است، تصویر مجازی است و چون بزرگ‌تر از جسم است، وسیله عدسی همگرا یا آینه‌ی مقعر است و چون در طرف دیگر تشکیل می‌شود، این وسیله آینه مقعر است.



۱۷۳- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم که اگر پرتویی از خلأ وارد منشور شود، بعد از شکست به طرف قسمت ضخیم‌تر منشور منحرف می‌شود (در این جا به طرف پایین می‌آید.) از طرفی بعد از ورود به کره‌ی شیشه‌ای، چون در امتداد قطر وارد کره شده (عمود بر سطح کره) بدون انحراف از آن خارج می‌شود.

۱۷۴- گزینه‌ی «۲»

در عدسی واگرا داریم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\xrightarrow[f\ \text{مجازی}]{q=kf\ \text{مجازی}}\frac{۱}{p}-\frac{۱}{kf}=\frac{-۱}{f}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۱}{kf}-\frac{۱}{f}\Rightarrow p=\frac{kf}{۱-k}$$

$$m=\frac{q}{p}=\frac{kf}{\frac{kf}{۱-k}}\Rightarrow m=۱-k$$

۱۷۵- گزینه‌ی «۳»

نیروی چسبندگی بین مولکول‌های جیوه، بیش‌تر از نیروی چسبندگی سطحی بین جیوه و شیشه است.

۱۷۶- گزینه‌ی «۱»

فشار در نقاط هم‌سطح در یک مایع در حال تعادل یکسان است.

۱۷۷- گزینه‌ی «۳»

با استفاده از رابطه‌ی تعیین چگالی مخلوط داریم:

$$\rho=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}\xrightarrow{m=\rho V}\rho=\frac{\rho_A V_A+\rho_B V_B}{V_A+V_B}$$

$$\xrightarrow[\rho_A=۶۰۰\frac{g}{lit},\rho_B=۸۰۰\frac{g}{lit}]{\rho=۰/۷۵\frac{g}{cm^۳}=۷۵۰\frac{g}{lit}}۷۵۰=\frac{۶۰۰V_A+۸۰۰V_B}{V_A+V_B}\Rightarrow\frac{V_A}{V_B}=\frac{۱}{۳}$$

۱۷۸- گزینه‌ی «۲»

میدان الکتریکی در اطراف یک بار نقطه‌ای با مربع فاصله از آن نسبت عکس دارد، لذا داریم:

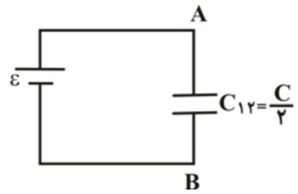
$$E=\frac{kq}{r^۲}\xrightarrow{q=\text{ثابت}}\frac{E_۲}{E_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

$$\xrightarrow[E_۱=۲۵۰\frac{N}{C},E=۱۶۰\frac{N}{C}]{r_۲=r+۱۰,r_۱=r}\frac{۱۶۰}{۲۵۰}=(\frac{r}{r+۱۰})^۲$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{r}{r+۱۰}\Rightarrow r=۴۰cm$$

۱۷۹- گزینه‌ی «۳»

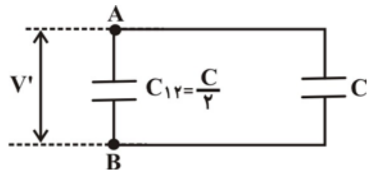
در ابتدا که کلید $k_۱$ بسته است، خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ پر می‌شوند و بار کل شاخه برابر با $q_۱$ است لذا داریم: (اگر ظرفیت هر خازن C باشد.)



$$q_۱=q_۲=q_{۱۲}=\frac{۱}{۲}C\varepsilon$$

هنگامی که کلید $k_۱$ را باز و کلید $k_۲$ را می‌بندیم، خازن C با شاخه‌ی AB موازی می‌شود که اختلاف پتانسیل مشترک مجموعه به صورت زیر است.

$$V'=\frac{q_{۱۲}+q_۳}{C_{۱۲}+C_۳}\xrightarrow{q_۳=۰}V'=\frac{\frac{۱}{۲}C\varepsilon}{\frac{۱}{۲}C+C}\Rightarrow V'=\frac{۱}{۳}\varepsilon$$



در این حالت بار جدید خازن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q'_۱=q'_۲=q'_{۱۲}=\frac{۱}{۲}C\times\frac{۱}{۳}\varepsilon=\frac{۱}{۶}C\varepsilon$$

$$\frac{q'_۱}{q_۱}=\frac{\frac{۱}{۶}C\varepsilon}{\frac{۱}{۲}C\varepsilon}\Rightarrow\frac{q'_۱}{q_۱}=\frac{۱}{۳}$$

۱۸۰- گزینه‌ی «۴»

در این جا اختلاف پتانسیل دو سر لامپ برابر ε است. در گزینه‌ی ۴ نیز اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از لامپ‌ها برابر ε است. (لامپ‌ها موازی‌اند) بنابراین تقریباً

شدت نور هر یک از لامپ‌های مدار گزینه‌ی «۴» تقریباً با شدت نور لامپ مدار داده شده یکسان است.

۱۸۱– گزینه‌ی «۲»

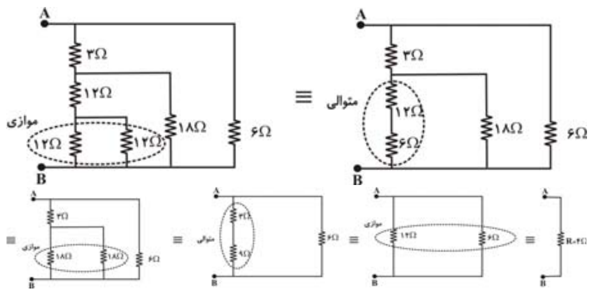
در ابتدا شدت جریان الکتریکی را در مدار تک حلقه‌ی داده شده، محاسبه می‌کنیم. سپس توان الکتریکی مقاومت ۲ اهمی را می‌یابیم.

$$I=\frac{\sum \varepsilon}{\sum R+\sum r}=\frac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{\sum R+\sum r}=\frac{۲۰-۸}{۸}\Rightarrow I=۱/۵A$$

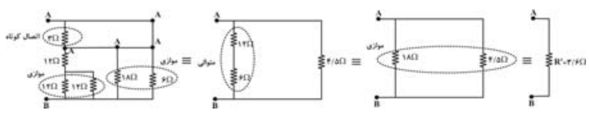
$$P=RI^۲\xrightarrow[I=۱/۵A]{R=۲\Omega}P=(۲)(۱/۵)^۲\Rightarrow P=۴/۵W$$

۱۸۲– گزینه‌ی «۱»

در حالتی که کلید باز است داریم:



و در حالتی که کلید بسته است داریم: (دو سر مقاومت ۳ اهمی اتصال کوتاه می‌شود)



$$\Delta R=R-R'=۴-۳/۶\Rightarrow \Delta R=۰/۴\Omega$$

۱۸۳– گزینه‌ی «۴»

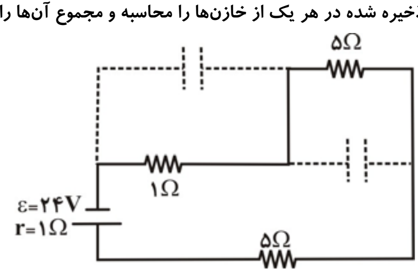
برای پاسخ به این پرسش، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

«۱» موقتاً شاخه‌های شامل خازن‌ها را حذف می‌کنیم.

«۲» مدار را حل می‌کنیم و جریان مدار را محاسبه می‌کنیم.

«۳» اختلاف پتانسیل دو سر شاخه‌های موازی با شاخه‌ی شامل خازن‌ها را می‌یابیم. این اختلاف پتانسیل برابر اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌ها است.

«۴» انرژی ذخیره شده در هر یک از خازن‌ها را محاسبه و مجموع آن‌ها را می‌یابیم.



$$I=\frac{\varepsilon}{\sum R+\sum r}=\frac{۲۴}{۱۲}\Rightarrow I=۲A$$

$$\begin{cases}V=RI\\ V_۱=۱\times ۲=۲V\Rightarrow V_{C_۱}=۲V\end{cases}$$

$$\begin{cases}V=RI\\ V_۲=۵\times ۲=۱۰V\Rightarrow V_{C_۲}=۱۰V\end{cases}$$

$$U_۲=\frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲=\frac{۱}{۲}(۶)(۱۰)^۲\Rightarrow U_۲=۳۰۰\mu J$$

$$U_۱=\frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times (۲)^۲\Rightarrow U_۱=۲۰\mu J$$

$$U_T=U_۱+U_۲=۳۲۰\mu J$$

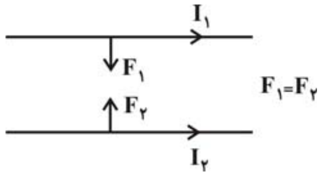
۱۸۴– گزینه‌ی «۲»

با استفاده از رابطه‌ی تعیین نیروی وارد بر یک سیم راست حامل جریان داریم:

$$F=IlB\Rightarrow B=\frac{F}{Il}\Rightarrow [B]=\frac{N}{m.A}$$

۱۸۵– گزینه‌ی «۱»

سیم‌های موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را می‌ربایند و طبق قانون سوم نیوتون بزرگی نیرویی که هر یک برد دیگری وارد می‌کند، هم‌اندازه است.



۱۸۶– گزینه‌ی «۴»

انرژی ذخیره شده در سیملوله‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲\Rightarrow \frac{U_A}{U_B}=(\frac{L_A}{L_B})\times (\frac{I_A}{I_B})^۲\xrightarrow[I_A=۲I_B]{L_A=۲L_B}$$

$$\frac{U_A}{U_B}=(۲)(۲)^۲\Rightarrow \frac{U_A}{U_B}=۸$$

۱۸۷– گزینه‌ی «۳»

ابتدا میدان مغناطیسی سیملوله را محاسبه می‌کنیم و بعد از آن شار مغناطیسی را می‌یابیم.

$$B=k\mu_\circ\frac{NI}{l}\xrightarrow[I=۰/۵A,l=۰/۲m]{k=۳۰۰,N=۱۰۰}B=۳۰۰\times ۴\pi\times ۱۰^{-۷}\times \frac{۱۰۰\times ۰/۵}{۰/۲}$$

$$\Rightarrow B=۳\pi\times ۱۰^{-۲}T, A=\pi r^۲\times \pi\times (۲\times ۱۰^{-۲})$$

$$\Rightarrow A=۴\pi\times ۱۰^{-۴}m^۲$$

$$\varphi = BA = (3\pi\times10^{-2})(4\pi\times10^{-4})$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} \varphi = 12\times10^{-5}\,\mathbf{Wb}$$

۱۸۸– گزینه‌ی «۲»

بیشینه‌ی انرژی جنبشی، پتانسیل و مکانیکی نوسانگر با هم مساوی‌اند بنابراین داریم:

$$K_{max} = U_{max} = E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow k = \frac{2E}{A^2} \xrightarrow{E=6\times10^{-2}J,\,A=5\times10^{-2}m}$$

$$k = \frac{2\times6\times10^{-2}}{25\times10^{-4}} = 48\,\frac{N}{m}$$

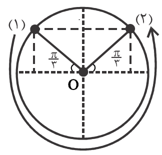
۱۸۹– گزینه‌ی «۴»

در بازه‌ی زمانی (صفر تا ۰/۰۲ ثانیه) جابه‌جایی متحرک (سطح زیر نمودار) برابر صفر است، بنابراین $\bar{v} = 0$ است. و برای تعیین شتاب متوسط داریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-10-10}{0/02-0} \Rightarrow \bar{a} = -10^3\,\frac{m}{s^2}$$

۱۹۰– گزینه‌ی «۱»

برای حل این مسئله از دایره‌ی مرجع کمک می‌گیریم:



موقعیت (۱): نوسانگر در مکان مثبت بوده و در سوی منفی محور در حرکت است.
این موقعیت متناظر با ناحیه‌ی دوم مثلثاتی می‌باشد و داریم:

$$|\sin\varphi| = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

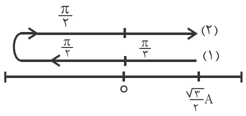
موقعیت (۲): هنگام اولین عبور بعدی از همان نقطه، مکان مثبت، و نوسانگر در سوی مثبت محور در حرکت است. این وضعیت در شکل با علامت (۲) نشان داده شده است. تغییر فاز نوسانگر از (۱) به (۲) را به کمک شکل یافته، مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\,rad$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \xrightarrow{\Delta\varphi=\frac{5\pi}{3}rad,\,\Delta t=1s} \frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}\times1 \rightarrow T = 1/2\,s$$

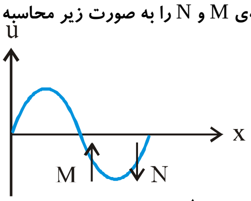
روش دیگر: یافتن تغییر فاز را می‌توان روی محور به صورت زیر نشان داد. اختلاف فاز از $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا مرکز، $\frac{\pi}{3}$ است و هر $\frac{A}{2}$ نیز معادل $\frac{\pi}{2}$ تغییر فاز است و بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$\Delta\varphi = \pi + 2(\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{3}$$



۱۹۱– گزینه‌ی «۳»

با توجه به جهت انتشار موج می‌توان فاز دو نقطه‌ی M و N را به صورت زیر محاسبه کرد.



$$\sin\varphi_M = \frac{u_M}{A} = \frac{-\frac{1}{2}A}{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_M = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} & v<0 \\ \frac{11\pi}{6} & v>0 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\sin\varphi_N = \frac{u_N}{A} = \frac{-\frac{1}{2}A}{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_N = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} & v<0 \quad \text{ق ق} \\ \frac{11\pi}{6} & v>0 \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = |\varphi_M - \varphi_N| = \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\,rad$$

۱۹۲– گزینه‌ی «۲»

با توجه به این‌که عدد موج و سرعت انتشار موج داده شده است، می‌توان بسامد زاویه‌ای را تعیین کرد و سپس تابع موج را به صورت زیر بیان کرد.

$$k = \frac{\omega}{v} \xrightarrow[v=25\frac{m}{s}]{k=0/2\frac{rad}{cm}=20\frac{rad}{m}} 20 = \frac{\omega}{25} \Rightarrow \omega = 500\,\frac{rad}{s}$$

$$u_y = A\sin(\omega t - kx) \xrightarrow[\omega=500\frac{rad}{s},\;k=20\frac{rad}{m}]{A=4cm=0/04m}$$

$$u_y = 0/04\sin(500t - 20x)$$

۱۹۳– گزینه‌ی «۴»

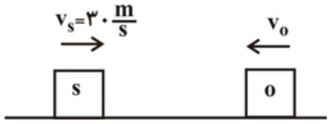
با استفاده از رابطه‌ی مربوط به تراز شدت صوت داریم:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \xrightarrow[I_0=10^{-12}\frac{W}{m^2}]{I=10^4\times10^{-6}=10^{-2}\frac{W}{m^2}}$$

$$\beta = 10\log\frac{10^{-2}}{10^{-12}} \Rightarrow \beta = 10\log 10^{10} \Rightarrow \beta = 100\,dB$$

۱۹۴– گزینه‌ی «۱»

طول موج صوتی که به گوش شنونده می‌رسد به حرکت شنونده بستگی ندارد و در این جا به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$\lambda_\circ = \frac{v - v_s}{f_s} \xrightarrow[f_s=800\,HZ]{v=330\frac{m}{s},\,v_s=30\frac{m}{s}} \lambda_\circ = \frac{330-30}{800} \Rightarrow \lambda_\circ = \frac{3}{8}m$$

۱۹۵– گزینه‌ی «۱»

سرعت همه‌ی موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ برابر سرعت نور در خلأ است.

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow[v=c=3\times10^{8}\frac{m}{s}]{\Delta x=300\times10^{3}m}$$

$$300\times10^{3} = 3\times10^{8}\Delta t \Rightarrow \Delta t = 10^{-3}s$$

۱۹۶– گزینه‌ی «۴»

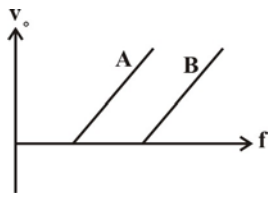
برای تعیین فاصله‌ی دومین نوار روشن از نوار روشن مرکزی داریم:

$$x = \frac{n\lambda D}{a} \xrightarrow[D=500a]{n=2\,,\,\lambda=600\times10^{-9}m}$$

$$x = \frac{2\times600\times10^{-9}\times500a}{a} = 0.6\times10^{-3}m = 0.6mm$$

۱۹۷– گزینه‌ی «۲»

ابتدا انرژی فوتون فرودی و طول موج آن را محاسبه و سپس گزینه‌ها را با توجه به آن‌ها بررسی می‌کنیم.



$$E = hf \xrightarrow[h=4\times10^{-15}ev\cdot s]{f=1.5\times10^{15}Hz} E = 4\times10^{-15}\times1.5\times10^{15}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \xrightarrow[c=3\times10^{8}\frac{m}{s}]{f=1.5\times10^{15}Hz} \lambda = \frac{3\times10^{8}}{1.5\times10^{15}} = 2\times10^{-7}$$

$$\to \lambda = 200nnm \to E = 6eV$$

چون به ازای انرژی $6eV$ پدیده‌ی فوتوالکتریک رخ می‌دهد، تابع کار هر دو فلز از $6eV$ کم‌تر است. هم‌چنین چون طول موج فوتون فرودی $200nm$ است، باید طول موج قطع فلزها از $200nm$ بیش‌تر باشد. بنابراین به ازای همه‌ی طول موج‌های کم‌تر از $200nm$، پدیده‌ی فوتوالکتریک رخ خواهد داد. در ضمن چون بسامد فوتون فرودی $f = 1.5\times10^{15}Hz$ است، به ازای بسامدهای کم‌تر از $1.5\times10^{15}Hz$ ممکن است برای فلز B پدیده‌ی فوتوالکتریک رخ ندهد، اما برای فلز A ممکن است رخ دهد.

۱۹۸– گزینه‌ی «۳»

در اتم هیدروژن طول موج‌های رشته‌ی لیمان در ناحیه‌ی فرابنفش، رشته‌ی بالمر در ناحیه‌ی فرابنفش و مرئی و رشته‌های بالاتر از بالمر (پاشن) براکت و فروسرخ) در ناحیه‌ی فروسرخ است.

چون الکترون در حالت پایه‌ی اتم هیدروژن قرار دارد $(n' = 1)$ است و طول موجی که می‌تواند این الکترون را از اتم جدا کند $(n = \infty)$ در ناحیه‌ی فرابنفش مربوط به رشته‌ی لیمان قرار دارد.

$$hf = E_n - E_{n'} \xrightarrow[n=\infty,n'=1]{E_n=-\frac{E_R}{n^2}} hf = -\frac{E}{(\infty)^2} - (-\frac{E_R}{1})$$

$$\Rightarrow hf = E_R \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} \frac{h_c}{\lambda} = E_R$$

$$\xrightarrow[h=4\times10^{-15}eVs]{E_R=13.6eV,c=3\times10^{8}\frac{m}{s}} \frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{\lambda} = 13.6$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{12}{13.6}\times10^{-7}m < 4\times10^{7}m \Rightarrow \lambda$$ در ناحیه‌ی فرابنفش است.

۱۹۹– گزینه‌ی «۱»

رسانا‌ها در دمای پایین دارای نوار‌بخشی پر هستند.

۲۰۰– گزینه‌ی «۳»

با تابش پرتو آلفا، عدد اتمی ۲ واحد و عدد جرمی ۴ واحد کاهش می‌یابد و $^{238}_{92}U$ به $^{234}_{90}Ti$ تبدیل می‌شود.