ریاضی نهم

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از داشته‌های قبلی برای معلوم کردن مطلبی که در ابتدا مجهول بوده است را (استدلال) می‌گوییم.

مشاهده و حدس و گمان دلایل قابل اطمینانی برای اثبات نیستند.

به مثالی که یک حکم کلی را رد کند، مثال نقض می‌گویند.

برای مثال اگر فردی با رسم ارتفاع‌های یک مثلث چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های مثلث در درون آن مثلث است می‌توانیم این ادعای کلی او را با رسم ارتفاع‌های یک مثلث منفرجه الزاویه این ادعا او را رد کرد.

آشنایی با اثبات در هندسه

به اطلاعات داده شده در مسأله فرض و به خواسته‌ی مسأله حکم می‌گوییم.

در استدلال باید با یک روال منطقی و معتبر از فرض به حکم برسیم.

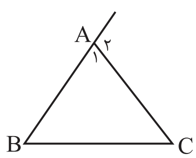
نکته:

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ a=c \end{array}\right\} \Rightarrow b=c \qquad \left.\begin{array}{l} a>b \\ b>c \end{array}\right\} \Rightarrow a<c$$

نکته: در تمامی چند ضلع‌های محدب مجموع زاوایای خارجی آن چند ضلعی ۳۶۰° است.

نکته: اندازه هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم از رابطۀ $\frac{(۸-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ به دست می‌آید.

مثال: ثابت کنید در هر مثلث اندازه زاویۀ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویۀ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ\\ \widehat{A}_۱+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=\widehat{A}_۱+\widehat{B}+\widehat{C}\Rightarrow \widehat{A}_۲=\widehat{B}+\widehat{C}$$

هم نهشتی مثلث‌ها:

حالت‌های هم نهشتی دو مثلث

۱- سه ضلع دو مثلث به طور متناظر برابر باشند (ض ض ض)

۲- دو ضلع مثلثی و زاویۀ بین آن‌ها به طور متناظر با دو ضلع مثلث دیگر و زاویۀ بین آن دو ضلع برابر باشند. (ض ز ض)

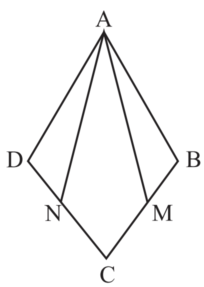
۳-دو زاویه مثلثی و ضلع بین آن‌ها به طور متناظر با دو زاویۀ مثلث دیگر و ضلع بین آن دو زاویه برابر باشند. (ز ض ز)

حالت‌های هم نهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم الزاویه:

۱) برابری وتر و یک ضلع قائم از هر مثلث

مثال: در شکل مقابل ABCD یک لوزی می‌باشد. اگر M و N وسط‌های CD و CB باشند. می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$$



$$\left.\begin{array}{ll} AD = AB & \text{اضلاع لوزی} \\ \widehat{B} = \widehat{D} & \text{زاویای روبه‌روی لوزی} \\ BN = DM = \frac{BC}{۲} = \frac{DC}{۲} & \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ADN}$$

حل مسأله در هندسه:

قدم‌های حل مسأله در هندسه:

۱) فهمیدن صورت مسأله و درک آن

۲) رسم شکل متناسب با صورت مسأله

۳) مشخص کردن فرض و حکم با توجه به صورت مسأله

۴) پیدا کرلدن یک راه‌حل منطقی و معتبر برای رسیدن از فرض به حکم مسأله

نکته: در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند وترهای نظیر آن‌ها با هم برابرند و برعکس.

شکل‌های متشابه:

دو شکل را که ۳ شرط زیر را داشته باشند متشابه می‌گوییم:

۱) تعداد اضلاع آن‌ها با یکدیگر برابر باشند.

۲) زاوایای متناظر آن‌ها با همدیگر مساوی باشند.

۳) اظلاع متناظر آن‌ها با همدیگر متناسب باشند.

نسبت تشابه: به نسبت اندازه دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گوییم.

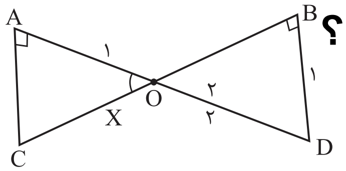
از بین تمامی مثلث‌ها فقط دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه با یکدیگر تشابهند.

به طور کلی می‌توان گفت:

تمامی چند ضلعی‌های منتظم (با تعداد اضلاع برابر) با همدیگر متشابهند.

نکته: در دو مثلث قائم الزاویه اگر یکی از زاویای تند دو مثلث با همدیگر برابر بود این دو مثلث با یکدیگر متشابهند.

مثال: در شکل زیر $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمه‌اند. X چه‌قدر است؟



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O}_1=\widehat{O}_2\\ \widehat{A}=\widehat{B}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{O}C\sim B\overset{\triangle}{O}D\Rightarrow$$

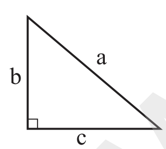
$$\frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{1}{OB}$$

فیثاغورس $:OB^2+BD^2=OD^2\Rightarrow OB=\sqrt{OD^2-BD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

رابطهٔ فیثاغورس:

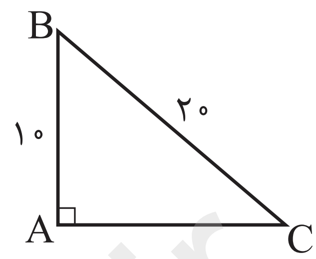
رابطهٔ میان مجذور (مربع) اندازه ضلع‌های مثلث قائم الزاویه چه رابطه فیثاغورس معروف است. این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذورتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.



$$a^2=b^2+c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

مثال: مساحت مثلث قائم الزاویه زیر چه قدر است؟



$$AB^{۲} + AC = BC^{۲} \Rightarrow ۱۰^{۲} + AC^{۲} = ۲۰^{۲} \Rightarrow$$

$$AC^{۲} = ۳۰۰ \Rightarrow AC = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۱۰ \times ۱۰\sqrt{۳}}{۲} = ۵۰\sqrt{۳}$$

همنهشتی مثلث‌ها:

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران، انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نَهشت‌اند.

در دو شکل هم نهشت زوایای

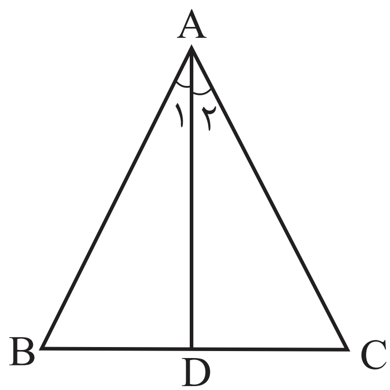
به طور کلی ۲ مثلث ۳ حالت هم نهشتی دارند:

۱- برابری ۳ ضلع (ض ض ض)

۲- برابری دو ضلع و زاویهٔ بین (ض ز ض)

۳- برابری دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

مثال: اگر نیمساز زاویه $\hat{A}$ در مثلث متساوی الساقین زیر را رسم کنیم چرا مثلث‌های ایجاد شده هم نهشت می‌شوند؟



$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین $AC = AC$

AD نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ض ز ض $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABO} \cong \overset{\triangle}{ACO}$

AD مشترک

هم نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه:

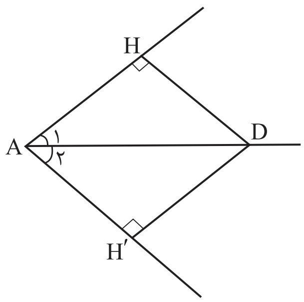
علاوه بر حالت‌هایی که به طور کلی برای همه نهشتی مثلث‌ها داریم برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه ۲ حالت دیگر نیز وجود دارد:

۱- برابری وتر و یک ضلع

۲- برابری وتر و یک زاویهٔ تند

مثال: ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

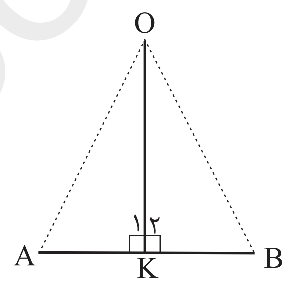
(یادآوری: فاصله هر نقطه از یک خط برابر با طول پاره‌خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود.)



$$\left.\begin{array}{l} AD \\ H = H = ۹۰^\circ \\ A_۱ = A_۲ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر یک زاویه تند مشترک}} \overset{\triangle}{AHD} \cong \overset{\triangle}{AH'D}$$

$$\Rightarrow DH = DH'$$

مثال: ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. چون OK عمود منصف AB می‌باشد. پس:



$AK = KB$ و $\widehat{K}_۱ = \widehat{K}_۲ = ۹۰^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} Ok \quad \text{مشترک} \\ \widehat{K}_۱ = \widehat{K}_۲ = ۹۰^\circ \\ AK = KB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AKO} \cong \overset{\triangle}{BKO} \Rightarrow OA = OB$$

فصل ۷ (توان و جذر):

توان: همان طور که می‌دانیم برای ضرب توان‌ها قواعد زیر را داریم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید و به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $۳۶ \times ۱۴۴ = ۶^۲ \times ۱۲^۲ = ۷۲^۲$

۳) $۲^۳ \times ۸^۵ \times ۴^۳ = ۲^۳ \times (۲^۳)^۵ \times (۲^۲)^۳ = ۲^{۲۱}$

۳) $(-\frac{۲}{۳})^۷ \times (-\frac{۲}{۳})^۵ = (-\frac{۲}{۳})^{۱۲}$

۴) $(-۶)^۴ \times (\frac{۱}{۲})^۴ = (-۳)^۴$

مثال: حاصل عبارت زیر به صورت عبارتی توان‌دار بنویسید.

۱) $(ab)^{۵} \times a^{۳} \times b^{۴} = a^{۵} \times b^{۵} \times a^{۳} \times b^{۴} = a^{۸}b^{۹}$ ۲) $\left[(-\frac{۱}{۷})^{۳}\right]^{۴} = (-\frac{۱}{۷})^{۱۲}$

تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی:

اگر a عددی دلخواه و مخالف صفر و ncm عددهایی طبیعی باشند:

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$$

مثال: حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

۱) $(xy)^{۷} \div (my)^{۴} = (xy)^{۷-۴} = (xy)^{۳} = x^{۳}y^{۳}$

۲) $\frac{(-۲)^{۹}}{(-۲)^{۲}} = (-۲)^{۹-۲} = (-۲)^{۷}$

تقسیم دو عدد توان با توان‌های مساوی:

$$a^{m} \div b^{m} = (\frac{a}{b})^{m}$$

اگر a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و $b \neq ۰$.

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

۱) $\left[۳۶^{۵} \div (-۳)^{۵}\right] \div \left[(-۲)^{۵} \times (-۳)^{۵}\right] = (\frac{۳۶}{-۳})^{-۵}(\frac{(-۲)}{(-۳)})^{۵} = (-۱۲)^{۵} \div (\frac{۲}{۳})^{۵} = (-۱۸)^{۵}$

جذر تقریبی:

برای مثال می‌خواهیم جذر تفریبی عدد ۳۴ را بدست آوریم.

چون $۲۵ < ۳۴ < ۳۶$ می‌باشد. پس $\sqrt{۳۴}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد.

یعنی داریم: $۵ < \sqrt{۳۴} < ۶$

اگر عدد وسط ۶ و ۵ یعنی ۵ و نیم را در نظر بگیریم چون
$(۵/۵)^{۲} = ۳۰/۲۵$، پس حتماً جذر ۳۴ از ۵/۵ بیشتر است.

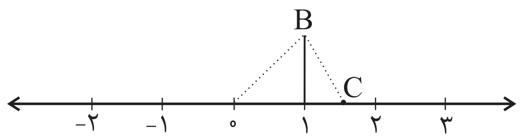
می‌توانیم چند عدد بزرگتر از ۵/۵ را بررسی کنیم؛ مثلاً ۵/۷ و ۵/۹ و ۵/۹

در نهایت با محاسبه مجذور اعداد بالا مشاهده می‌کنیم که
$(۵/۸)^{۲} = ۳۳/۶۴$ می‌باشد. پس: $\sqrt{۳۴} \simeq ۵/۸$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد:

برای مثال می‌خواهیم عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد نشان دهیم:

نقطهٔ c روی محور اعداد نشان دهندهٔ عدد $\sqrt{۲}$ می‌باشد.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم: $\sqrt{ab}=(\sqrt{a})\times(\sqrt{b})$

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۲) $\sqrt{۲۰۰}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۰۰}=۱۰\sqrt{۲}$

۱) $\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۳۶}=۶$

اگر a و b دو عدد مثبت باشند. داریم: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$\sqrt{\frac{۴۹}{۱۶}}=\bigcirc\Rightarrow\bigcirc=\frac{\sqrt{۴۹}}{\sqrt{۱۶}}=\frac{۷}{۴}$

۱) $\sqrt{\bigcirc}=\frac{۳}{۵}$ $\quad\bigcirc=(\frac{۳}{۵})^{۲}=\frac{۹}{۲۵}$