درسنامه ریاضی دهم(آمادگی آزمون ۲۳ شهریور)

توان های گویا: تاکنون عادت داشتیم تنها اعداد طبیعی را به عنوان توان های یک عدد ببینیم اما اکنون میخواهیم بدانیم در صورت گویا بودن توان یک عدد، باید چگونه با آن برخورد شود.

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعیین می کنیم:

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

نکته: در کتاب ریاضی دهم، تعریف بالا را برای a با مقادیر منفی به کار نمی بریم.

هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m , n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می-کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^{m} = (a^{m})^{\frac{۱}{n}}$$

و نیز:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$$

در واقع ما در حال حاضر می توانیم اعداد رادیکالی را به اعدادی با توان های گویا تبدیل کنیم. برای مثال:

$$۵^{\frac{۲}{۷}} = (\sqrt[۷]{۵})^{۲} = \sqrt[۷]{۵^{۲}} = \sqrt[۷]{۲۵}$$

از خواص اعداد توان دار با پایه های مشترک:

$$۱)\ a^{r} \times a^{s} = a^{r+s}$$

$$۲)\ (a^{r})^{s} = a^{rs}$$

$$۳)\ (ab)^{r} = a^{r} \times b^{r}$$

$$۴)\ \frac{a^{r}}{a^{s}} = a^{r-s}$$

نکته: با توجه به مطالب فوق دو نکته زیر را که همواره برقرار است، در می یابیم:

$$۱)\ \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

$$۲)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

اثبات هردو نکته از طریق نوشتن اعداد رادیکالی به صورت اعداد با توان های گویا امکان پذیر است.

عبارت های جبری

در سال گذشته با برخی از اتحاد های جبری آشنا شدید و میدانید زمانی به یک عبارت جبری اتحاد گفته می شود که به ازای اعداد دلخواه برقرار باشد.

یادآوری اتحاد های سال قبل:

$$۱)\ (a \pm b)^{۲} = a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲}$$

$$۲)\ (a-b)(a+b) = a^{۲} - b^{۲}$$

$$۳)\ (a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

$$۴)\ (x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$$

اتحاد مکعب دو جمله ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نکته: از اتحاد های مجموع و تفاضل مکعب ها، به عنوان نتیجه، اتحاد های چاق و لاغر به صورت زیر بدست می آیند:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

پرانتز کوچکتر را اصطلاحا لاغر و پرانتز بزرگتر را چاق می نامند.

گویا کردن مخرج کسر

از سال قبل به یاد دارید که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب ضرب می کردیم. بعنوان مثال:

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

اکنون می خواهیم از اتحاد های جبری که تا کنون آموخته ایم برای گویا کردن مخرج کسر ها استفاده کنیم.

به مثال های این بخش بشدت توجه کنید☺

الف) گویا کردن با استفاده از اتحاد مزدوج:

$$\frac{۲}{۵+\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۵+\sqrt{۳}}\times\frac{۵-\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۳}}=\frac{۲(۵-\sqrt{۳})}{۵^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۲(۵-\sqrt{۳})}{۲۵-۳}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۱۱}$$

ب) گویا کردم با استفاده از اتحاد های چاق و لاغر:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^{۲}}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^{۳}-۱^{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱$$

در واقع در مخرج یا قسمت لاغر اتحاد وجود دارد یا قسمت چاق و ما با ضرب کردن قسمت دیگر اتحاد به صورت کسر در آن، یک اتحاد چاق و لاغر کامل در مخرج می سازیم که باعث گویا شدن مخرج می شود.

همچنین از اتحادهای جبری برای بدست آوردن عبارات ساخته شده از مجهولات یک معادله نیز می توان استفاده کرد.

مثال: اگر $\sqrt{x-۴}+\sqrt{x+۲}=۳$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴})\times(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴})=(\sqrt{x+۲})^۲-(\sqrt{x-۴})^۲=x+۲-x+۴=۶$$
$$(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴})\times(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴})=۳\times(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴})=۶$$
$$(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴})=۲$$

مبینا عبیری- دانشجوی عمران شهید بهشتی