فصل ششم : شمارش بدون شمردن

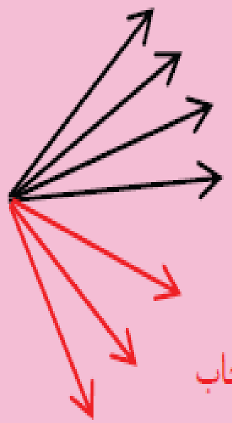
شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

درس اول - شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد و در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

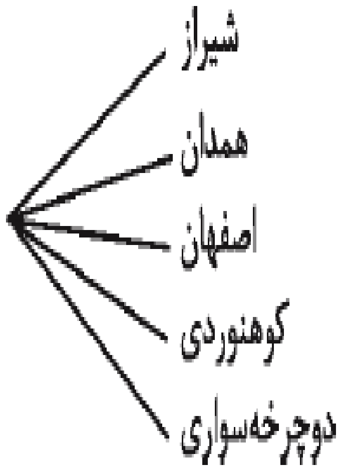
توجه کنید که در کار مورد نظر نهایتاً باید به یک روش انجام شود.



تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد بطوریکه در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1+m_2+\cdots+m_k$ روش وجود دارد.

▼**مثال ۱)** فرهاد قصد دارد برای آخر هفته یا به یکی از شهرهای شیراز، همدان و اصفهان برای مسافرت برود یا به یکی از ورزش‌های کوهنوردی یا دوچرخه‌سواری بپردازد. او به چند طریق می‌تواند آخر هفته‌ی خود را سپری کند؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت ۱ صفحه ۱۱۹)

☑**پاسخ:** فرهاد برای مسافرت ۳ انتخاب و برای ورزش ۲ انتخاب دارد و چون فقط یکی از این کارها را قرار است انجام دهد، تعداد حالت‌های ممکن، طبق اصل جمع برابر با ۵=۳+۲ حالت است.



اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد و برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

توجه کنید که هر دو مرحله‌ی کار باید انجام شود.

▼**مثال ۲)** ساختمانی دارای ۵ درب و ساختمان دیگری دارای ۳ درب است. به چند طریق می‌توان از ساختمان اول خارج و به ساختمان دوم وارد شد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۲۰-تهران- علویان ۸۸)

☑**پاسخ:** برای خروج از ساختمان اول ۵ درب (۵ حالت) و برای ورود به ساختمان دوم ۳ درب (۳ حالت) وجود دارد. پس طبق اصل ضرب

۱۵ = ۳ × ۵ حالت داریم.

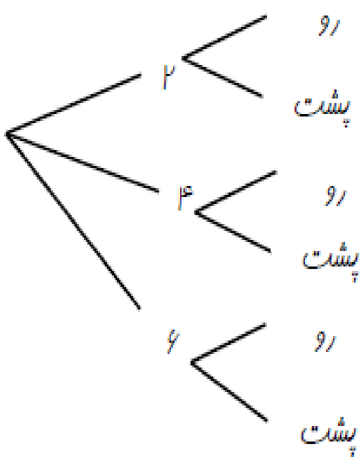
نکته: با استفاده از نمودار درختی می‌توان تعداد حالت‌های ممکن برای انجام یک کار را بررسی کرد و به گونه‌ای مؤثر حالت‌ها را نمایش داد. برای رسم نمودار درختی به تعداد حالت‌های ممکن در هر مرحله شاخه رسم می‌کنیم و سپس به سراغ مرحله بعد می رویم و این کار را ادامه می‌دهیم تا نمودار درختی تکمیل شود.

▼**مثال ۳)** یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آنها تاس عدد زوج آمده است، کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۲۲- سراسری انسانی-۷۲)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ٤) ۱

☑**پاسخ:** با استفاده از نمودار درختی می‌توان حالت‌هایی که عدد تاس زوج است را بررسی کرد:

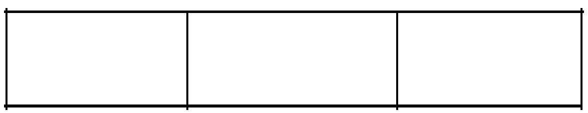


پس به ۶ حالت، عدد تاس زوج است.

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد و برای انجام مرحله‌ی اول m_1 روش، برای انجام مرحله‌ی دوم m_2 روش و ... برای انجام مرحله‌ی k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ روش قابل انجام است.

▼ **مثال ۶)** با استفاده از سه رنگ قرمز و آبی و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ آمیزی کرد به طوری که خانه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۲۵- تهران- عفاف- ۸۸)



☑ **پاسخ:** برای خانه اول از سمت چپ ۳ حالت {قرمز، آبی، سبز} داریم. به جز رنگی که در خانه اول استفاده می‌شود دو رنگ دیگر را می‌توان در خانه وسط قرار داد. همچنین به جز رنگی که در خانه‌ی وسط قرار می‌گیرد، دو رنگ دیگر را می‌توان در خانه‌ی سمت چپ قرار داد به این ترتیب رنگ خانه‌های مجاور متمایز خواهد بود. پس طبق تعمیم اصل ضرب داریم:

$\boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{2}$ تعداد حالت‌ها = ۱۲

نکته: معمولاً هرگاه بین انتخاب‌ها از «یا» استفاده شود از اصل جمع و هرگاه بین انتخاب‌ها از «و» استفاده شود از اصل ضرب باید استفاده کنیم.

▼ مثال ۱۰) تعداد حالت‌ها را در هر یک از موارد زیر به دست آورید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس صفحه‌ی ۱۲)

الف) اگر در یک آزمایش تصادفی یک سکه «یا» یک تاس بریزیم.

ب) اگر در یک آزمایش تصادفی یک سکه «و» یک تاس بریزیم.

☑ پاسخ: الف) چون بین پرتاب سکه و پرتاب تاس «یا» آمده است یعنی یکی از این دو انجام شود، پس طبق اصل جمع $۸ = ۶ + ۲$ حالت داریم.

ب) چون بین پرتاب سکه و پرتاب تاس «و» آمده است یعنی هر دو آن رخ می‌دهد، پس طبق اصل ضرب $۱۲ = ۶ \times ۲$ حالت داریم.

درس دوم - جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوئیم.

فاکتوریل:

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. طبق قرارداد $0! = 1$ است.

▼ **مثال ۱۲)** کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۳، صفحه‌ی ۱۳۱)

الف) $۶! = ۲! + ۴!$

ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

پ) $۱۲! = ۶! \times ۲!$

ت) $۳! = \frac{۶!}{۲!}$

ث) $(۲!)^{۲} = ۴!$

ج) $۳ \times ۴! = ۱۲!$

☑ **پاسخ:** الف) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times \ldots \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰ \\ ۲! + ۴! = ۲ + ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۶ \end{cases} \Rightarrow ۶! \neq ۲! + ۴!$$

ب) درست است.

پ) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۱۲! = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times \ldots \times ۲ \times ۱ \\ ۶! \times ۲! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times \ldots \times ۲ \times ۱ \times ۲ \end{cases} \Rightarrow ۱۲! \neq ۶! \times ۲!$$

ت) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \\ \frac{۶!}{۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times \ldots \times ۲ \times ۱}{۲ \times ۱} \end{cases} \Rightarrow ۳! \neq \frac{۶!}{۲!}$$

ث) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} (۲)^{۲}! = (۲ \times ۱)^{۲} = ۴ \\ ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴ \end{cases} \Rightarrow (۲)^{۲}! \neq ۴!$$

ج) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۳! \times ۴! = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲ \\ ۱۲! = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times \ldots \times ۲ \times ۱ \end{cases} \Rightarrow ۳ \times ۴! \neq ۱۲!$$

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با !n است.

▼مثال ۱۶) تعداد کلمات ۶ حرفی که با حروف کلمه‌ی Comput ساخته می‌شوند، کدام است؟ (معنی و مفهوم کلمات اهمیتی ندارد).

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۳۰- آزمون کانون- ۹۳)

۱) !۶ ۲) $۲^۶ \times ۳^۶$ ۳) !۳ × !۲ ۴) !۵ × ۳

☑پاسخ: تعداد کلمات ۶ حرفی که با استفاده از حروف کلمه‌ی comput می‌توان ساخت برابر با تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز است که برابر با !۶ است.

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

نکته: در برخی از مسائل جایگشت، می‌بایست اشیائی که از یک نوع خاص هستند در کنار هم باشند. در این مسائل ابتدا این اشیاء را در کنار هم در یک بسته قرار می‌دهیم و سپس جایگشت این بسته با اشیاء باقی‌مانده را حساب می‌کنیم. توجه کنید که اشیاء داخل بسته نیز با خودشان جایگشت دارند. در نهایت طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها را به دست می‌آوریم.

▼مثال ۱۸) به چند طریق می‌توان ۲ کتاب شیمی، ۳ کتاب فیزیک و ۱ کتاب ادبیات را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های شیمی همواره کنار هم باشند؟ (کتاب‌ها متمایز هستند). (کتاب درسی، تتمه‌ی مثال صفحه‌ی ۱۳۰-آزمون کانون- ۹۵)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲٤۰

☑پاسخ: کتاب‌های شیمی را در کنار هم قرار داده با آنها یک بسته ایجاد می‌کنیم. این بسته با ۴ کتاب دیگر (۳ کتاب فیزیک و ۱ کتاب ادبیات) در مجموع ۵ شیء را ایجاد می‌کند که این ۵ شیء به !۵ حالت در کنار هم جایگشت دارند. همچنین کتاب‌های شیمی در داخل بسته‌ی خود به !۲ حالت جایگشت دارند. پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر با ۲۴۰= !۲ × !۵ حالت است.

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

نکته: برای محاسبه‌ی جایگشت «یکی در میان» دو حالت زیر مفروض است:

حالت اول: تعداد اشیاء نوع ۱ و نوع ۲ که قرار است یکی در میان چیده شوند برابر است. در این حالت یک بار شیء نوع (۱) را در ابتدای صف قرار می‌دهیم و بار دیگر شیء نوع (۲) را در ابتدای صف قرار می‌دهیم. در هر حالت جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم و در نهایت طبق اصل جمع تعداد حالت‌های هر بار را با هم جمع می‌کنیم.

بار اول: نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱

بار دوم: نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲

حالت دوم: تعداد اشیاء نوع (۱) از تعداد اشیاء نوع (۲) یک واحد بیشتر است. در این حالت با شروع از شیء نوع (۱) به طور یکی در میان اشیاء را می‌چینیم و جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم:

نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱ | نوع ۲ | نوع ۱

توجه کنید که در حالت‌های فوق جایگشت را برای اشیاء هم نوع می‌نویسیم یعنی نوع ۱ها با هم و نوع ۲ها با هم.

▼مثال ۱۹) ٤ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان از هر نوع، در یک قفسه کنار هم چید؟

((کتاب درسی، تکمیله‌ی مثال صفحه‌ی ۱۳۰-آزمون کانون-۹۴)

۱) $2!\times 4!\times 3!$ ۲) $4!\times 3!$ ۳) $7!$ ٤) $\dfrac{7!}{4!\times 3!}$

☑پاسخ: مطابق شکل زیر، چون تعداد کتاب‌های ریاضی یک واحد بیشتر از تعداد کتاب‌های فیزیک است، ابتدا کتاب‌های ریاضی را می‌چینیم که جایگشت آنها در کنار هم برابر با !۴ حالت است. سپس کتاب‌های فیزیک را بین کتاب‌های ریاضی با !۳ جایگشت می‌چینیم. طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است: $4!\times 3!$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

ریاضی | فیزیک | ریاضی | فیزیک | ریاضی | فیزیک | ریاضی

جایگشت r تایی از n شیء متمایز:

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد که آن را جایگشت r تایی از n شیء متمایز می‌نامیم و با P (n , r) نمایش می‌دهیم را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

▼**مثال ۲)** صاحب یک فروشگاه اسباب‌بازی می‌خواهد ۳ نوع اسباب‌بازی را در ردیف جلوی ویترین خود بچیند. اگر او این کار را به ۳۳۶ حالت بتواند انجام دهد، چند نوع اسباب‌بازی در فروشگاه دارد؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۳۱)

☑**پاسخ:** اگر تعداد انواع اسباب‌بازی‌ها را برابر با n در نظر بگیریم، تعداد انتخاب‌های ۳ شیء از n شیء که ترتیب قرارگیری آن‌ها هم در ویترین اهمیت دارد برابر با $P(n,۳)$ است که طبق صورت سؤال برابر با ۳۳۶ است. داریم:

$$P(n,۳)=۳۳۶\Rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!}=۳۳۶\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=۳۳۶$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۳۳۶$$

حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر با ۳۳۶ شده است، پس کافی است عدد ۳۳۶ را به حاصل‌ضرب سه عدد متوالی تجزیه کنیم تا n پیدا شود.

$$n(n-۱)(n-۲)=۳۳۶=۸\times۷\times۶\Rightarrow n=۸$$

پس ۸ نوع اسباب‌بازی در فروشگاه وجود دارد.