

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

## انتگرال

تعریف: فرض کنید برای هر  $x \in I$ ، رابطه‌ی  $F'(x) = f(x)$  برقرار باشد، در این صورت تابع  $F$  را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع  $f$  روی بازه‌ی  $I$  می‌گوئیم و آن را با نماد  $\int f(x)dx$  نمایش می‌دهیم.

## ویژگی‌های انتگرال نامعین

- 1)  $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + c \Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + c, \dots$
- 2)  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad (k \in R)$
- 3)  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- 4)  $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$

## فرمول‌های انتگرال نامعین

- 1)  $\int dx = x + c$
- 2)  $\int kdx = kx + c \quad k \in R$
- 3)  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad ; \quad (n \neq -1)$
- 4)  $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$
- 5)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$

انتگرال

$$\begin{aligned} 1 - \cos(2\alpha) &= 2\sin^2\alpha & 2\sin^2\alpha - 1 &= 1 - \cos(2\alpha) & 2 - 2\sin^2\alpha - 1 &= 1 - \cos(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \\ 2 - 2\sin^2\alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \cos\alpha &- \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

$$6) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$7) \int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$8) \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$9) \int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$10) \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + c$$

$$11) \int (1 + \tan^2(ax + b)) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$12) \int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x + c$$

$$13) \int (1 + \cot^2(ax + b)) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad a > 0$$

$$16) \int \frac{dx}{1-x^2} = \tan^{-1} x + c$$

$$17) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad a > 0$$

$$18) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$19) \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$



$$20) \int \tan x \, dx = -\text{Ln}|\cos x| + c$$

$$21) \int \tan(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \text{Ln}|\cos(ax + b)| + c$$

$$22) \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$23) \int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$24) \int \cot x \, dx = \text{Ln}|\sin x| + c$$

$$25) \int \cot(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \text{Ln}|\sin(ax + b)| + c$$

تست) اگر  $\int \frac{3x}{\sqrt{x-1}} \, dx = f(x)\sqrt{x-1} + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۸۷)

$$2x + 4 \quad (۴)$$

$$2x + 3 \quad (۳)$$

$$2x + 2 \quad (۲)$$

$$2x + 1 \quad (۱)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt{x-1}} \, dx &= 3 \int \left( \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} \right) dx = 3 \int \left( \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) dx \\ &= \int \sqrt{x-1} \, dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx = 3 \times \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + 3 \times 2\sqrt{x-1} + c \\ &= 2(x-1)\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} + c = \sqrt{x-1} (2x-2+6) + c \\ &= \sqrt{x-1} (2x+4) + c \Rightarrow f(x) = 4 \end{aligned}$$

نکته: در تست‌هایی به فرم بالا از طرف شامل انتگرال، انتگرال گرفته و پس از بدست آوردن حاصل انتگرال و فاکتورگیری مناسب  $f(x)$  را می‌یابیم.



## قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه‌ی  $I$  که شامل نقطه‌ی  $a$  است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند:

الف) هر گاه تابع  $F$  را بر  $I$  با ضابطه‌ی  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  تعریف کنیم آنگاه تابع  $F$  مشتق‌پذیر است و  $F'(x) = f(x)$ ، یعنی  $F$  یک تابع اولیه‌ی  $f$  می‌باشد به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

ب) هر گاه  $G$  تابع اولیه‌ی دیگری برای  $x$  باشد، به طوری که  $G'(x) = f(x)$ ، آن‌گاه برای هر دو نقطه از  $I$  مانند  $a, b, (a < b)$

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

تست) حاصل  $\int_0^4 \left[ \frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$  کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

$$4 - 2\sqrt{2} + \text{Ln}2 \quad (۲) \qquad 4 - 2\sqrt{2} - \text{Ln}2 \quad (۱)$$

$$2 - 2\sqrt{2} + \text{Ln}2 \quad (۴) \qquad 2 + 2\sqrt{2} - \text{Ln}2 \quad (۳)$$

پاسخ:

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} \right] = 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} \right] = 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 \left[ \frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_0^2 0 dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_2^4 \frac{1}{x} dx$$



$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(\alpha + \alpha) - \sin^2(\alpha + \alpha) \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2 \cos^2 \alpha - 1 - 2 \sin^2 \alpha + 1 = 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ 2 - 2 \sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$= \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx - \ln|x| \Big|_2^4 = 2\sqrt{x} \Big|_2^4 - \ln|x| \Big|_2^4 = 4 - 2\sqrt{2} - (\ln 4 - \ln 2)$$

$$= 4 - 2\sqrt{2} - \ln \frac{4}{2} = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$

تست) اگر  $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2}$  باشد  $G'(4)$  چند برابر  $\ln 2$  است؟ (ریاضی ۹۴)

۱ (۱)      ۲ (۳)      ۳ (۴)      ۱/۵ (۲)

پاسخ:

$$G'(x) = 2x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} + x^2 \left( \frac{\ln \sqrt{x} + 2}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{aligned} G'(4) &= 2 \times 4 \int_2^{\sqrt{4}=2} \frac{\ln(t+2)}{t^2} + 4^2 \times \frac{1}{2\sqrt{4}} \frac{\ln \sqrt{4} + 2}{4} = 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{\ln 4}{4} \\ &= \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \end{aligned}$$

نکته: چون ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $f$  و محور  $x$  ها از  $x = a$  تا  $x = a$  یک خط می‌باشد و هیچ مساحتی ندارد پس:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

نکته: در حالت کلی اگر تابع  $f$  بر بازه‌ی  $I$  شامل نقطه‌ی  $a$  پیوسته و توابع  $g, h$  در این بازه مشتق پذیر باشند داریم:

$$1) F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = g'(x)f(g(x))$$

$$2) F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$$



از کتاب روال

$$\begin{aligned}
 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\
 2 - 2 \sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\
 \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha
 \end{aligned}$$

تست ۹۳) میانگین تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$  بر بازه‌ی  $[1,3]$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج)

(۹۳)

- $\frac{5}{3}$  (۴)       $\frac{4}{3}$  (۳)       $3 - \ln 2$  (۲)       $2 - \ln 3$  (۱)

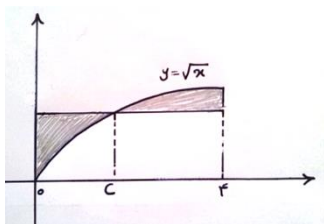
پاسخ:

$$\begin{aligned}
 \bar{f} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \frac{x^2-1}{x} \right) dx \Rightarrow \bar{f} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx \\
 \Rightarrow \bar{f} &= \frac{1}{2} \int_1^3 x dx - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \ln|x| \Big|_1^3 \\
 &= \frac{1}{4} (9 - 1) - \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = 2 - \ln \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

نکته: مقدار متوسط یا میانگین تابع  $f$  بر بازه‌ی  $[a,b]$  را با  $\bar{f}$  نشان می‌دهیم و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم.

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

تست ۹۲) در شکل روبه‌رو مساحت دو ناحیه‌ی سایه‌زده برابرند  $C$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



- $\frac{9}{4}$  (۴)      ۲ (۳)       $\frac{16}{9}$  (۲)       $\frac{4}{3}$  (۱)

پاسخ:

چون مساحت دو ناحیه‌ی مشخص شده در شکل برابرند پس در واقع داریم:

$$f(c) = \frac{1}{4} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_0^4 = \frac{2}{12} \times 4\sqrt{4} - 0 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$



$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{16}{9}$$

سوال: حاصل انتگرال  $\int \sin 4x \cos 2x dx$  را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا حاصل ضرب را به حاصل جمع تبدیل می‌نمائیم.

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\Rightarrow \int \sin 4x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{6} \cos 6x \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) + c$$

$$= -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

نکته: برای محاسبه انتگرال‌هایی نظیر  $\int \cos ax \cos bx dx$ ,  $\int \sin ax \sin bx dx$ ,  $\int \sin ax \cos bx dx$

ابتدا عبارت جلوی انتگرال‌ها را به حاصل جمع تبدیل کرده و سپس آنها را محاسبه می‌کنیم.

سوال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\int \sin^4 x dx$

ب)  $\int \cos^2 x dx$

پاسخ:

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left( 1 - 2\cos 2x + \left( \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left( 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$$



$$\begin{aligned}
 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\
 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\
 \cos(\alpha - \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\
 \cos(\alpha - \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\sin 4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$\text{ب) } \int \cos^2 x \, dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

**نکته:** برای محاسبه‌ی انتگرال‌های  $\int \cos^{2n} ax \, dx$  ،  $\int \sin^{2n} ax \, dx$  که در آن  $n \in \mathbb{N}$  ، ابتدا به کمک فرمول‌های طلایی  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  ،  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  ، انتگرال را به یک انتگرال مقدماتی تبدیل نموده و سپس آنها را محاسبه می‌کنیم.

**سوال:** حاصل  $\int_{-3}^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4} dx$  را به دست آورید.

تابع  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$  را ساده‌تر می‌نمائیم:

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4) + 4x}{x^2 + 4} = 1 + \frac{4x}{x^2 + 4} \Rightarrow g(x)$$

تابع  $g(x) = \frac{4x}{x^2+4}$  ، تابعی فرد است. پس این تابع روی بازه‌ی  $[-3, 3]$  انتگرالش صفر است.

$$\int_{-3}^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4} = \int_{-3}^3 \left( 1 + \frac{4x}{x^2+4} \right) dx = \int_{-3}^3 1 \, dx + \int_{-3}^3 \frac{4x}{x^2+4} \, dx$$

$$= \int_{-3}^3 1 \, dx = x \Big|_{-3}^3 = (3 - (-2)) = 6$$

**نکته:** اگر  $f$  روی بازه‌ی  $[-a, a]$  تابعی فرد و انتگرال پذیر باشد آن گاه:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$





پاسخ: اگر  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  تابع زوج است پس داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) dx &= 2 \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) dx = 2 \times \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{6}{\pi} \left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin 0\right) = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \end{aligned}$$

نکته: اگر  $f$  روی بازه‌ی  $[-a, a]$  تابعی زوج و انتگرال پذیر باشد آن گاه:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

سوال: انتگرال پذیری تابع  $f(x) = \frac{x^2-1}{3x+4}$  را در بازه‌ی  $[-2, 3]$  بررسی کنید.

پاسخ: تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $[-2, 2]$  دارای مجانب قائم است پس در این بازه انتگرال پذیر نیست.

نکته: اگر تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  دارای مجانب قائم باشد آن گاه در این بازه انتگرال ناپذیر است

سوال: انتگرال پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$  را در بازه‌ی  $[0, 1]$  بررسی کنید.

پاسخ: این تابع در این بازه دارای بی‌شمار نقطه‌ی ناپیوستگی است پس در این بازه انتگرال ناپذیر است.

نکته: اگر تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  دارای بی‌شمار نقطه‌ی ناپیوستگی باشد آن گاه تابع در این بازه

انتگرال ناپذیر است.



تست ۴) برای تابع  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ، روی بازه‌ی  $[0, 2]$  با انتخاب  $n = 4$  در بررسی انتگرال معین، مجموع بالا یعنی  $U_4$  کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور)

- ۱) ۰/۹۵      ۲) ۱/۰۲      ۳) ۱/۰۵      ۴) ۱/۰۵

پاسخ:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{زیر بازه‌ها} = \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

$$f'(x) = \frac{1-0}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

تابع روی بازه‌ی  $[0, 2]$  صعودی است پس  $Max$  مطلق تابع  $f$  در انتهای هر زیر بازه رخ می‌دهد پس:

$$U_4 = \left( f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \times \Delta x = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{63}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{20} = 1/05$$

تست ۴) تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ -3 & x \notin Q \end{cases}$  مفروض است، حاصل  $U_n(f) - L_n(f)$  در بازه-

ی  $[0, 1]$  برای  $n = 10$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۱)

- ۱) -۱      ۲) ۲      ۳) -۳      ۴) ۵

پاسخ:

$$U_{10}(f) - L_{10}(f) = |2 - (-3)| \times 1 = 5$$

نکته: در تابع  $f(x) = \begin{cases} p & x \in Q \\ q & x \notin Q \end{cases}$  روی بازه‌ی  $[a, b]$  داریم:  $U_n - L_n = |p - q|(b - a)$



$$\begin{aligned}
 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\
 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\
 \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha
 \end{aligned}$$

تست) مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی تابع  $y = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$  و محور  $x$  ها و دو خط به معادلات

(سراسری ریاضی ۹۰)  $x = \frac{\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{3}$  و کدام است؟

- ۱) 13      ۲)  $2\sqrt{3}$       ۳)  $\sqrt{3} + 1$       ۴)  $2\sqrt{3} - 3$

پاسخ: همواره داریم:  $1 + \sin x > 0, \cos^2 x > 0$  ، پس مساحت ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$s = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) dx + 0 = 2(\tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \tan \frac{\pi}{3} - 2 \times 0 = 2\sqrt{3}$$

نکته: ۱) اگر تابع  $f$  روی بازه‌ی  $[a, b]$  پیوسته باشد و برای هر  $x \in [a, b]$  ،  $f(x) \geq 0$  ، آن‌گاه

مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی به معادله‌ی  $y = f(x)$  و محور  $x$  ها و دو خط  $x = a$  ،  $x = b$  از

رابطه‌ی  $S = \int_a^b f(x) dx$  به دست می‌آید.

۲) اگر تابع  $f$  روی بازه‌ی  $[a, b]$  پیوسته باشد و برای هر  $x \in [a, b]$  ،  $f(x) \leq 0$  ، آن‌گاه

مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع به معادله‌ی  $y = f(x)$  و محور  $x$  ها و دو خط  $x = a$  ،  $x = b$

بر حسب واحد مربع از رابطه‌ی  $S = -\int_a^b f(x) dx$  به دست می‌آید.

سوال: سطح محصور بین نمودار منحنی‌های  $x^2 = 4y, y^2 = 4x$  را به دست آورید.



پاسخ:

$$y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$$

$$x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x^4 = 64x$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$s = \int_0^4 \left( 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \left( \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{12}x^3 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

نکته: مساحت ناحیه‌ی محصور بین دو منحنی  $y^2 = bx$  ,  $x^2 = ay$  همواره برابر  $s = \frac{|ab|}{3}$  است.

سوال: اندازه‌ی سطح محصور بین دو منحنی به معادله‌های  $f(x) = x^3 + 3x - 2$  ,  $g(x) = x^2$  را بیابید.

پاسخ: برای یافتن  $a$  ,  $b$  (حد و انتگرال‌گیری) دو معادله را با هم قطع می‌دهیم یعنی:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + x^2 = x^3 + 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 = a \\ x = 2 = b \end{cases}$$

$$s = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \left| \left( \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 \right|$$
$$= \left| \left( \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \right| = \left| \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + 2 \right| = \left| \frac{14 - 27 + 12}{6} \right| = \frac{1}{6}$$

نکته: اگر  $f$  ,  $g$  در بازه‌ی  $[a, b]$  پیوسته باشند و نمودارهای آن در بازه‌ی  $[a, b]$  نقطه یا نقاط تقاطع نداشته باشند آن گاه سطح محصور بین نمودارهای دو تابع  $f$  ,  $g$  در بازه‌ی  $[a, b]$  از رابطه‌ی زیر

به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 \\ 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

انتگرال

تست ۳۳ اگر  $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$  ، معادله‌ی مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری ۹۱)

- (۱)  $y = 2x - 2$       (۲)  $2y = x - 1$       (۳)  $2y = x - 2$       (۴)  $y = 2x - 1$

پاسخ:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \Rightarrow \text{نقطه‌ی تماس } A(1,0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^3} \Rightarrow \text{مماس } m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y = x - 1$$

تست ۳۴ شیب خط مماس بر منحنی  $y = f(x)$  در هر نقطه‌ی  $m(x,y)$  واقع بر آن برابر  $\frac{3}{(x-1)^2}$  است اگر

منحنی این تابع از نقطه‌ی  $(2,1)$  بگذرد معادله‌ی خط مجانب افقی آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)



$$\begin{aligned}
 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\
 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\
 \cos(\alpha - \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$y = 4 \quad (۴) \qquad y = 3 \quad (۳) \qquad y = 2 \quad (۲) \qquad y = -3 \quad (۱)$$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = \frac{-3}{(x-1)} + c$$

$$f(x) = \frac{-3}{(x-1)} + c \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-3}{(2-1)} + c \Rightarrow c = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3}{(x-1)} + 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 4 \Rightarrow y = 4 \quad \text{مجانِب افقی}$$

موفق باشید

عباس اسدی امیرآبادی

*Abas.asadi68@yahoo.com*

